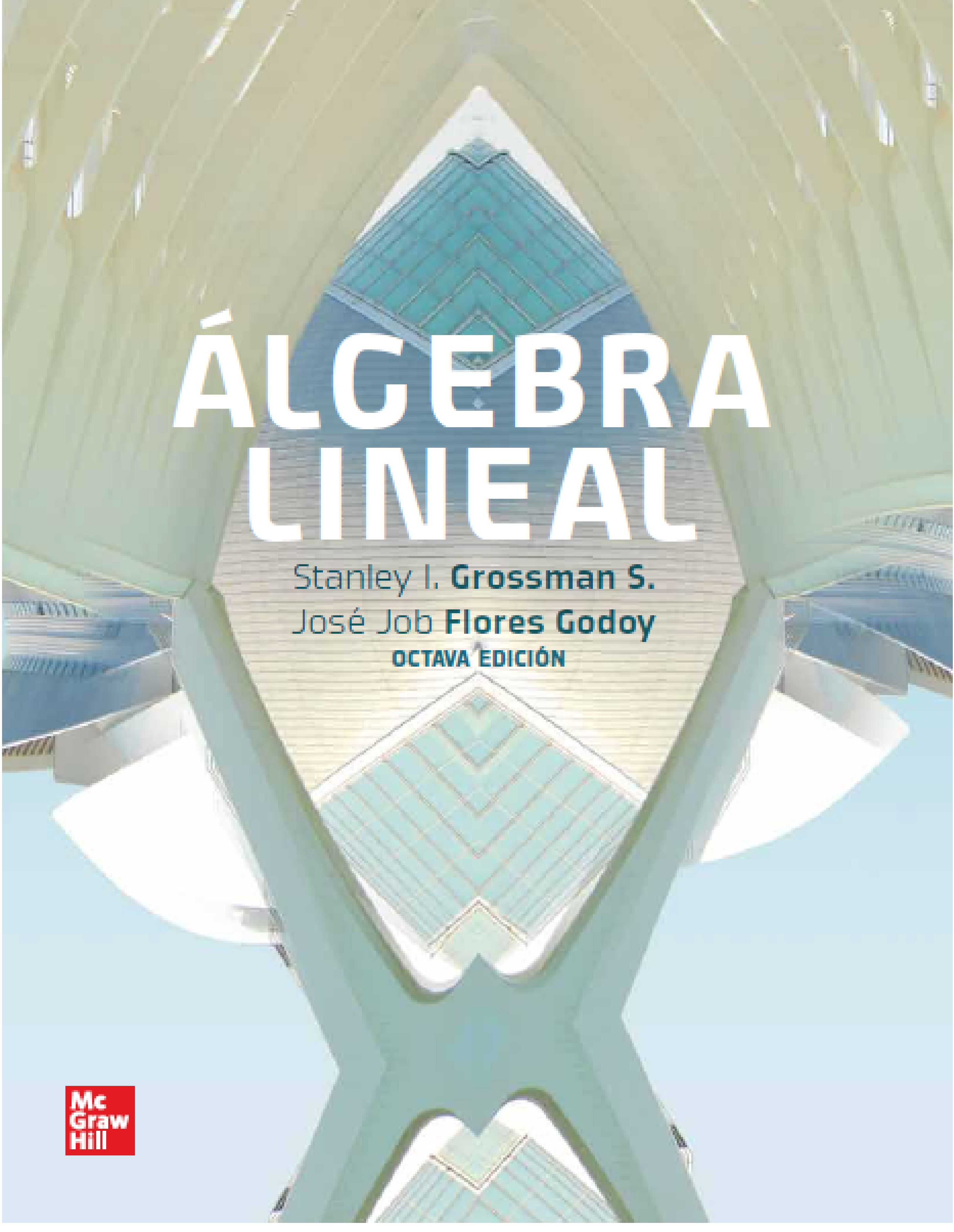


ÁLGEBRA LINEAL

Stanley I. **Grossman S.**
José Job **Flores Godoy**

OCTAVA EDICIÓN

Mc Graw Hill

Grossman / Flores

Octava Edición

José Job Flores Godoy
Departamento de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Católica del Uruguay

4 de diciembre de 2019

Capítulo 7

7.1 Definiciones y ejemplos

1. No lineal $T(\alpha\mathbf{v}) \neq \alpha T(\mathbf{v})$.

3. Lineal.

21. Lineal.

23. Lineal.

25. Lineal.

27. Lineal.

29. No Lineal $T(\alpha\mathbf{v}) \neq \alpha T(\mathbf{v})$.

35. Lineal.

39. No lineal $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \neq \alpha T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$.

49. $T(\alpha\mathbf{v}) = \langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}_0\rangle = (\alpha\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}_0 = \alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0) = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_0\rangle = \alpha T(\mathbf{v})$. $T(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_0\rangle = (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_0\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_0\rangle = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$. Se cumplen ambas propiedades.

51. Usando el problema 49, podemos mostrar que la suma de transformaciones lineales es una transformación lineal.

7.2 Propiedades de las transformaciones lineales: imagen y núcleo

1. $\operatorname{nu} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$, $\nu = 1$, $\rho = 1$.

3. $\operatorname{nu} T = 0$, $imageT = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\nu = 0$, $\rho = 1$.

5. $\operatorname{nu} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$, $\nu = 2$, $\rho = 1$.

7. $\operatorname{nu} T = 0_{22}$, $\operatorname{im} T = \mathbb{M}_{22}$, $\nu = 0$, $\rho = 4$.

9. $\operatorname{nu} T = 0_{\mathbb{P}_2}$, $\operatorname{im} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\nu = 0$, $\rho = 3$.

11. $\operatorname{nu} T = \operatorname{gen}\left\{\dfrac{1}{x^2}\right\}$, $\operatorname{im} T = \left\{g(x) \in C(0,1) \,\middle|\, \dfrac{\int g(x)}{x^2} dx\right\}$, $\nu = 1$, $\rho = \infty$.

13. $\operatorname{nu} T = \operatorname{gen}\{f \in C(0,1) \,|\, f(0) = 0\}$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$, $\nu = \infty$, $\rho = 1$.

23. Usando la definición del núcleo de una transformación $TA = 0$, $A - A^\top = 0 \Rightarrow A = A^\top$ que es la definición de matrices simétricas. Usando la definición de imagen de una transformación $TA = Q$, $A - A^\top = Q$ pero $Q = -Q^\top$ que es la definición de que Q sea antisimétrica.

7.3 Representación matricial de una transformación lineal

7. $A_T = \begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{nu} T = 0$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^3$, $\nu = 0$, $\rho = 3$.

11. $A_T = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{nu} T = 0$, $\operatorname{im} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\nu = 0$, $\rho = 3$.

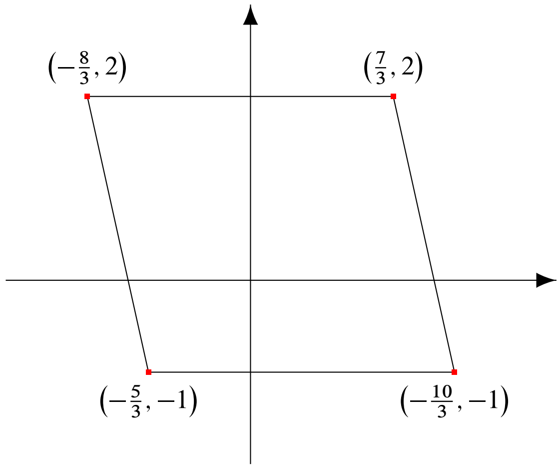
17. $A_T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{nu} T = 0$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^3$, $\nu = 0$, $\rho = 3$.

19. $A_T = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\operatorname{nu} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$, $\nu = 1$, $\rho = 2$.

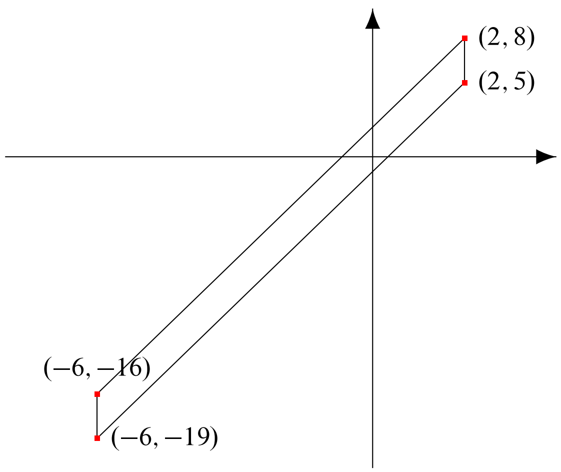
37. $A_T = \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}_{(n+1)\times n}$, $\operatorname{nu} T = 0$, $\operatorname{im} T = \{a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n | a_0 x + a_1 x^2 + \cdots a_n x^{n+1}\}$, $\nu = 0$, $\rho = n$.

53. Corte a lo largo del eje y.

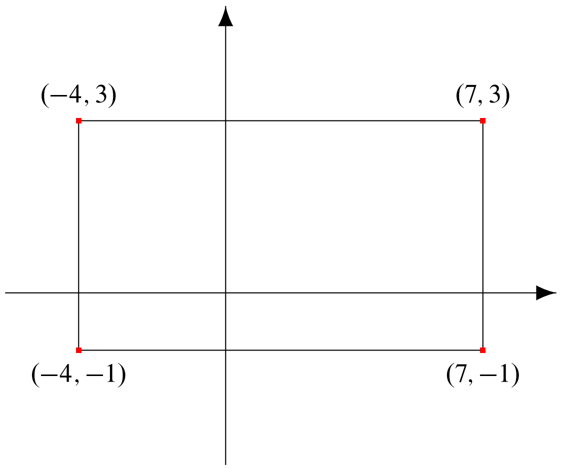
57. $A_T = \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}\\0&1\end{pmatrix}$



59. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$



61. $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



65. $A_T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.4 Isomorfismos

7.5 Isometrías

11. Considere la base ortonormal en $\mathbb{P}_2$ como $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}x}{2}, \frac{3\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{4}\right\}$. Considere a la base canónica en $\mathbb{R}^3$ a $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Sean $p_1(x) = a_1\frac{\sqrt{2}}{2} + b_1\frac{\sqrt{6}x}{2} + c_1\frac{3\sqrt{10}(x^2-\frac{1}{3})}{4}$ y $p_2(x) = a_2\frac{\sqrt{2}}{2} + b_2\frac{\sqrt{6}x}{2} + c_2\frac{3\sqrt{10}(x^2-\frac{1}{3})}{4}$ dos polinomios en $\mathbb{P}_2$ expresados en la base ortonormal. Defino a $T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\left(\frac{\sqrt{6}x}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\left(\frac{3\sqrt{10}(x^2-\frac{1}{3})}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con $T\left(A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{6}x}{2} + C\frac{3\sqrt{10}(x^2-\frac{1}{3})}{4}\right) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\langle T(p_1(x)), T(p_2(x)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$. Por otro lado $\langle p_1(x), p_2(x)\langle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ utilizando las propiedades del producto interno y el echo que los polinomios están expresados en una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$.

Ejercicios de repaso

7. No es linea $T(\alpha p(x)) \neq \alpha T(p(x))$.

13. $\text{nu}(T) = 0$, $\text{im}(T) = \text{gen}\left\{1, x, x^3\right\}$ $\nu = 0$, $\rho = 3$

15. $\text{nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$,

$\text{im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$, $\nu = 2$, $\rho = 2$.

19. $\text{nu}(T) = 0$, $\text{im}(T) = \text{gen}\left\{1 - x^3, x^2, x^2 + x^3\right\}$, $\nu = 0$, $\rho = 3$.

21. $\text{nu}(T) = 0$, $\text{im}(T) = \text{gen}\left\{x, x^2, x^3, x^4\right\}$, $\nu = 0$, $\rho = 4$.

23. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T(A) = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ -2a + 2c & -2b + 2d \end{pmatrix}$,

Sea $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\text{nu}(A_T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

$\text{im}(A_T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$, $\nu = 2$, $\rho = 2$.

37. Defina $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

La transformación es lineal. $\nu T = 0$ y T es 1-1, $\text{im}\, T = \mathbb{R}^3$ por lo tanto T es sobre lo que significa que $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{R}^3$.