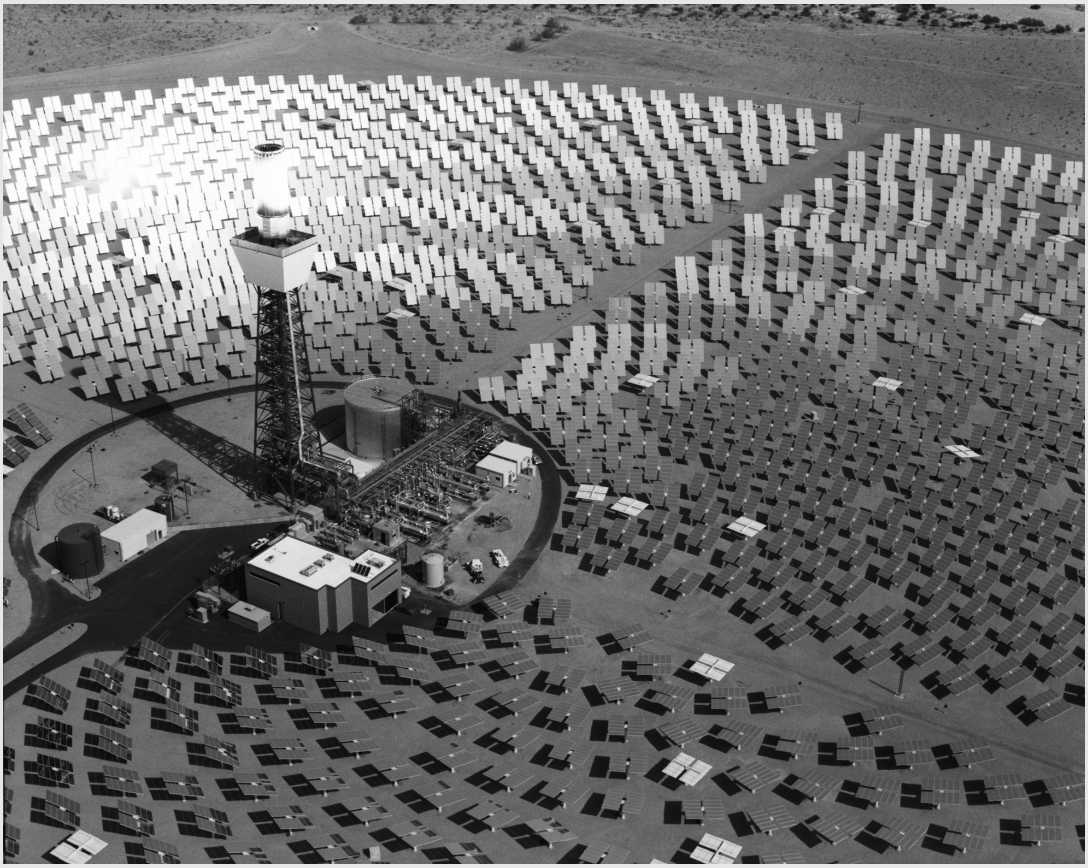


Horno solar en el desierto de Mojave, California

Parte 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Estructura del capítulo

El propósito de este breve capítulo es doble: presentar la terminología elemental de las **ecuaciones diferenciales** y analizar someramente la forma en que surgen las ecuaciones diferenciales con el fin de describir o modelar fenómenos físicos en términos matemáticos.

1.1 Definiciones y terminología

Introducción Los términos *diferencial* y *ecuación* indican, sin lugar a dudas, la resolución de cierto tipo de ecuaciones que contienen derivadas; sin embargo, antes de iniciar la resolución de cualquier ecuación, primero debemos aprender las definiciones elementales y la terminología del tema.

Una definición La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ representa en sí misma otra función $\phi'(x)$ que se encuentra mediante una regla específica. Por ejemplo, la función $y = e^{0.1x^2}$ es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, y su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si reemplazamos $e^{0.1x^2}$ por el símbolo y, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy. \qquad (1)$$

Ahora imagine que un amigo suyo le proporciona sólo la **ecuación diferencial** de la expresión (1), y que usted no tiene idea de cómo se obtuvo. Su amigo le pregunta: ¿cuál es la función representada por el símbolo y? Entonces usted se enfrenta a *uno* de los problemas básicos encontrados en un curso de ecuaciones diferenciales: ¿cómo resolver una ecuación de este tipo para la función incógnita $y = \phi(x)$? Tal cuestión es más o menos equivalente al conocido problema del inverso del cálculo diferencial: dada una derivada, encontrar una antiderivada.

Antes de avanzar más, permítanos ofrecer una definición más precisa del concepto de una ecuación diferencial.

Definición 1.1.1 Ecuación diferencial

Se dice que una **ecuación diferencial (ED)** es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Con el objetivo de referirnos a ellas, debemos clasificar las ecuaciones diferenciales por **tipo**, **orden** y **linealidad**.

Clasificación por tipo Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \qquad (2)$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina **ecuación diferencial parcial (EDP)**. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

son ecuaciones diferenciales parciales.

Notación A lo largo de este libro, las derivadas ordinarias se presentarán utilizando la **notación de Leibniz** dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, . . . , o la **notación prima** y', y'', y''', . . . Si se emplea esta última notación, las primeras dos ecuaciones diferenciales mostradas en (2) pueden expresarse de forma más compacta como $y' + 5y = e^x$ y $y'' - y' + 6y = 0$. En realidad, la notación de prima se utiliza para señalar solamente las primeras tres derivadas; la cuarta derivada se indica como $y^{(4)}$ en lugar de y''''. En términos generales, la n-ésima derivada será d^ny/dx^n o $y^{(n)}$. A pesar de ser menos conveniente de escribir y formar tipográficamente, la notación de Leibniz presenta una ventaja sobre la notación de prima en el sentido de que indica con claridad las variables independientes y dependientes. Por ejemplo, en la ecuación diferencial $d^2x/dt^2 + 16x = 0$, se observa de forma inmediata que el símbolo x representa ahora a la variable dependiente, mientras que la variable independiente será t. Además, es importante que usted conozca que en ingeniería y ciencias físicas ocasionalmente se utiliza la **notación de Newton por puntos** (a veces denominada despectivamente como notación de "manchas") para denotar las derivadas con respecto al tiempo t; de esta forma, la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -32$ se convierte en $\ddot{s} = -32$. Las derivadas parciales con frecuencia se indican mediante una **notación de subíndice** que muestra las variables independientes. Por ejemplo, las ecuaciones primera y segunda incluidas en (3) pueden a su vez indicarse como $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

Clasificación por orden El **orden de una ecuación diferencial** (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo,

$$\underset{\substack{\text{segundo orden}\\ \downarrow}}{}\frac{d^2y}{dx^2} + 5\Bigl(\underset{\substack{\text{primer orden}\\ \downarrow}}{}\frac{dy}{dx}\Bigr)^3 - 4y = e^x$$

representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se escriben ocasionalmente en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Por ejemplo, si suponemos que y representa la variable dependiente en $(y - x)dx + 4xdy = 0$, entonces $y' = dy/dx$, y así al dividir entre el diferencial dx obtenemos la forma alternativa $4xy' + y = x$. Consulte el apartado de *Comentarios* al final de esta sección.

De manera simbólica, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como una variable dependiente empleando la forma general

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Tanto por motivos prácticos como teóricos, de aquí en adelante debemos suponer que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria presentada en la forma (4) únicamente para la derivada más alta $y^{(n)}$ en términos de las variables $n + 1$ restantes. La ecuación diferencial

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

donde f es una función continua con valores reales, se denomina **forma normal** de (4). De este modo, cuando nos sea útil, debemos utilizar las formas normales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

para representar ecuaciones diferenciales generales ordinarias de primero y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es $y' = (x - y)/4x$. Consulte los *Comentarios*.

Clasificación por linealidad Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (4) es **lineal** si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{6}$$

Dos casos especiales importantes de (6) son las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{7}$$

En la combinación aditiva del extremo izquierdo de (6) observamos que las dos propiedades características de una EDO lineal son:

Recuerde estas dos características de una EDO lineal.

- La variable dependiente y así como todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1.
- Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen a lo sumo de la variable independiente x.

Las ecuaciones siguientes, a su vez,

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x,$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Acabamos de demostrar que la primera ecuación es lineal en la variable y al escribirla en la forma alternativa $4xy' + y = x$. Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** simplemente es una ecuación que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como sen y o $e^{y'}$, no pueden aparecer en una ecuación lineal. Por lo tanto,

$$\underbrace{(1-y)y'}_{\text{término no lineal: el coeficiente depende de } y} + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\operatorname{sen} y}_{\text{término no lineal: función no lineal de } y} = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \underbrace{y^2}_{\text{término no lineal: potencia diferente de } y} = 0,$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente.

Solución Como se indicó anteriormente, en el presente curso, uno de los objetivos es resolver —o encontrar soluciones de— ecuaciones diferenciales. En el siguiente cuadro se define el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición 1.1.2 Solución de una EDO

Toda función ϕ, definida sobre un intervalo I y que posea al menos n derivadas continuas sobre I, y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación sobre el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria (4) de n-ésimo orden será una función ϕ que posea al menos n derivadas y

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \text{ para toda } x \text{ en } I.$$

Se dice que ϕ *satisface* la ecuación diferencial sobre I. Para nuestros propósitos, también debemos asumir que una solución ϕ es una función con valores reales. En el análisis inicial se observó que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución de $dy/dx = 0.2xy$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

En ocasiones resultará conveniente indicar una solución mediante el símbolo alternativo *y(x)*.

Intervalo de definición No es posible considerar una *solución* de una ecuación diferencial ordinaria sin pensar al mismo tiempo en un *intervalo*. El intervalo I de la definición 1.1.2 se denomina de diversas maneras: **intervalo de definición**, **intervalo de validez** o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Compruebe que la función señalada representa una solución de la ecuación diferencial dada, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $dy/dx = xy^{1/2}$; $y = \frac{1}{16}x^4$ ***b***) $y'' - 2y' + y = 0$; $y = xe^x$

Solución Una forma de verificar que la función indicada representa una solución es revisar, después de sustituir, si cada extremo de la ecuación es igual para cada x localizada dentro del intervalo.

a) Del *extremo izquierdo*: $\dfrac{dy}{dx} = 4 \cdot \dfrac{x^3}{16} = \dfrac{x^3}{4}$

extremo derecho: $xy^{1/2} = x \cdot \left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x \cdot \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^3}{4}$,

observamos que cada extremo de la ecuación es igual para todo número real x. Advierta que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada positiva de $\frac{1}{16}x^4$.

b) A partir de las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos para todo número real x,

extremo izquierdo: $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$

extremo derecho: 0. ≡

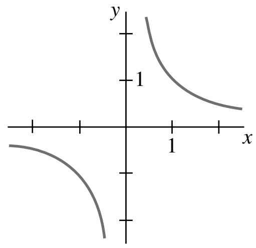
Observe también que en el ejemplo 1 cada ecuación diferencial posee la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. La solución a una ecuación diferencial idéntica a cero sobre un intervalo I se dice que es una **solución trivial**.

Curva de solución La gráfica de una solución ϕ de una EDO se denomina **curva de solución**. Ya que ϕ es una función diferenciable, será continua sobre su intervalo I de definición. De esta forma puede presentarse una diferencia entre la gráfica de la *función* ϕ y la gráfica de la *solución* ϕ. En otras palabras, el dominio de la función ϕ no necesita ser el mismo que el intervalo I de definición (o dominio) de la solución ϕ.

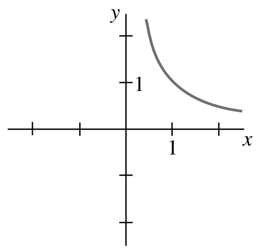
EJEMPLO 2 Comparación entre solución y función

Considerado en términos simples como una *función*, el dominio de $y = 1/x$ será el conjunto de todos los números reales x con excepción de 0. Cuando graficamos $y = 1/x$, trazamos puntos en el plano xy que corresponden a un acertado muestreo de números tomados a partir de su dominio. La función racional $y = 1/x$ es discontinua en 0, y su gráfica, en las cercanías de su origen, se presenta en la **FIGURA 1.1.1*a***). La función $y = 1/x$ no es diferenciable en $x = 0$ dado que el eje y (cuya ecuación es $x = 0$) representa una asíntota vertical de la gráfica.

Ahora $y = 1/x$ también es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$ (verifíquelo). Sin embargo, cuando decimos que $y = 1/x$ es una *solución* de esta ED, significa que es una función definida en un intervalo I sobre el cual es diferenciable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = 1/x$ será una solución de la ED sobre *todo* intervalo que no contenga a 0, tal como $(-3, -1)$, $(\frac{1}{2}, 10)$, $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Ya que las curvas de solución definidas por $y = 1/x$ sobre los intervalos $(-3, -1)$ y sobre $(\frac{1}{2}, 10)$ son básicamente segmentos o secciones de las curvas de solución definidas por $y = 1/x$ en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, respectivamente, tendrá sentido tomar el intervalo I más grande posible. De tal modo, tomaríamos a I para que fuera $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva de solución en el intervalo $(0, \infty)$ se muestra en la figura 1.1.1*b*). ≡



a) Función $y = 1/x$, $x \neq 0$



b) Solución $y = 1/x$, $(0, \infty)$

FIGURA 1.1.1 El ejemplo 2 ilustra la diferencia entre la función $y = 1/x$ y la solución $y = 1/x$

Soluciones explícitas e implícitas Usted debe estar familiarizado con los términos *funciones explícitas* e *implícitas* gracias a sus estudios de cálculo. Una solución en que la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y constantes se denomina **solución explícita**. Para nuestros propósitos, consideremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podemos manipular, evaluar y diferenciar utilizando las reglas estándar. En los últimos dos ejemplos hemos observado que $y = \frac{1}{16}x^4$, $y = xe^x$ y $y = 1/x$ son, a su vez, soluciones explícitas de $dy/dx = xy^{1/2}$, $y'' - 2y' + y = 0$, y $xy' + y = 0$. Además, la solución trivial $y = 0$ es una solución explícita de las tres ecuaciones. Cuando abordemos el problema de resolver realmente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias veremos que los métodos de solución no siempre llevan de forma directa a una solución explícita $y = \phi(x)$. Esto aplica en especial cuando se intenta resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Con frecuencia nos bastará con una relación o expresión $G(x, y) = 0$ que defina una solución ϕ de modo implícito.

Definición 1.1.3 Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación del tipo $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria (4) sobre un intervalo I siempre que exista al menos una función ϕ que satisfaga la relación así como a la ecuación diferencial sobre I.

Se encuentra fuera del alcance de este curso analizar las condiciones bajo las cuales una relación $G(x, y) = 0$ define una función diferenciable ϕ. Así que deberemos suponer que si la implementación formal de un método de solución lleva a una relación $G(x, y) = 0$, entonces existe al menos una función ϕ que satisface tanto a la relación (es decir, $G(x, \phi(x)) = 0$) como a la ecuación diferencial sobre un intervalo I. Si la solución implícita $G(x, y) = 0$ es sencilla, podríamos resolverla para y en términos de x y obtener una o más soluciones explícitas. Véase la sección de *Comentarios*.

EJEMPLO 3 Verificación de una solución implícita

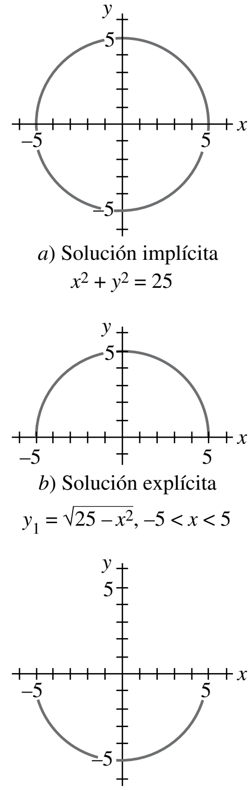
La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

sobre el intervalo $-5 < x < 5$. Al diferenciar de forma implícita obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \qquad \text{o} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al resolver la última ecuación para el símbolo dy/dx obtenemos (8). Además, al resolver $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ satisfacen la relación (es decir, $x^2 + \phi_1^2 = 25$ y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y representan soluciones explícitas definidas sobre el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas de solución presentadas en la **FIGURA 1.1.2*b*)** y 1.1.2*c*) son segmentos de la gráfica de la solución implícita de la figura 1.1.2*a*). ≡



a) Solución implícita $x^2 + y^2 = 25$

b) Solución explícita $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$

c) Solución explícita $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$

FIGURA 1.1.2 Solución implícita y dos soluciones explícitas en el ejemplo 3

Toda relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfará de manera *formal* a (8) para cualquier constante c. Sin embargo, se entiende que la relación siempre deberá tener sentido en el sistema de números reales; de tal modo, por ejemplo, no podemos afirmar que $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una solución implícita de la ecuación. ¿Por qué no?

Como la diferencia entre una solución implícita y una solución explícita debe quedar clara de forma intuitiva, no menospreciaremos el problema afirmando siempre: “Aquí se encuentra una solución explícita (implícita).”

Familias de soluciones El estudio de las ecuaciones diferenciales es similar al del cálculo integral. En algunos libros, a una solución ϕ se le denomina en ocasiones como la **integral** de la ecuación, y su gráfica se conoce como una **curva integral**. Al evaluar una antiderivada o integral indefinida en cálculo, utilizamos una sola constante c de integración. En forma análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, *por lo general* obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones denominadas **familia de soluciones de un parámetro**. Al resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, buscamos obtener una **familia de soluciones de n parámetros** $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$. Lo cual significa que una ecuación diferencial simple puede poseer un número infinito de soluciones que corresponden al número ilimitado de opciones para el o los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que se encuentra libre de parámetros arbitrarios se denomina **solución particular**. Por ejemplo, la familia de un solo parámetro $y = cx - x\cos x$ representa una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifíquelo). La **FIGURA 1.1.3**, obtenida mediante el uso de un programa computacional de graficación, muestra las gráficas de algunas de las soluciones de esta familia. La solución $y = -x\cos x$, la curva oscura en la figura, es una solución particular que corresponde a $c = 0$. De forma similar, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y = c_1e^x + c_2xe^x$ representa una familia de soluciones de dos parámetros (verifíquelo) de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ del inciso *b*) del ejemplo 1. Algunas soluciones particulares de la ecuación son las soluciones triviales $y = 0$ ($c_1 = c_2 = 0$), $y = xe^x$ ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$), $y = 5e^x - 2xe^x$ ($c_1 = 5$, $c_2 = -2$), etcétera.

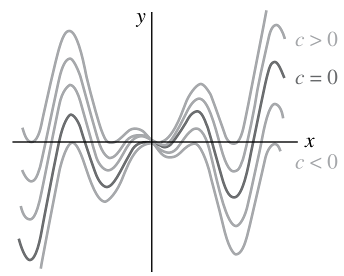


FIGURA 1.1.3 Algunas soluciones de $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$

En todos los ejemplos anteriores hemos utilizado x y y para denotar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero debería acostumbrarse a ver y trabajar con otros símbolos que denoten dichas variables. Por ejemplo, podríamos denotar la variable independiente como t y a la dependiente como x.

EJEMPLO 4 Utilización de distintos símbolos

Las funciones $x = c_1\cos 4t$ y $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, en las que c_1 y c_2 son parámetros o constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1\cos 4t$, las primeras dos derivadas con respecto a t son $x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t$ y $x'' = -16c_1\cos 4t$. Al sustituir x'' y x obtenemos

$$x'' + 16x = -16c_1\cos 4t + 16(c_1\cos 4t) = 0.$$

De forma similar, para $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ tenemos $x'' = -16c_2 \operatorname{sen} 4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Por último, resulta sencillo verificar que la combinación lineal de soluciones para la familia de dos parámetros $x = c_1\cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ es también una solución de la ecuación diferencial. ≡

El siguiente ejemplo demuestra que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida en forma segmentada.

EJEMPLO 5 Una solución definida en forma segmentada

Debemos verificar que la familia de un solo parámetro $y = cx^4$ es una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación diferencial $xy' - 4y \geq 0$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase la **FIGURA 1.1.4*a*)**. La función diferenciable definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

representa una solución particular de la ecuación pero no puede obtenerse a partir de la familia $y = cx^4$ mediante una elección simple de c; la solución se construye a partir de la familia al elegir $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \neq 0$. Observe la figura 1.1.4*b*). ≡

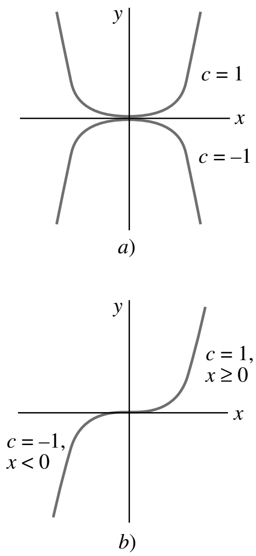


FIGURA 1.1.4 Algunas soluciones de $xy' - 4y = 0$ en el ejemplo 5

■ **Solución singular** En ocasiones una ecuación diferencial posee una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, es decir, una solución que no puede obtenerse mediante la especialización de *ninguno* de los parámetros de la familia de soluciones. Una solución adicional de este tipo se denomina **solución singular**. Por ejemplo, hemos observado que $y = \frac{1}{16}x^4$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ sobre $(-\infty, \infty)$. En la sección 2.2 demostraremos, mediante su resolución, que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ cuenta con la familia de soluciones de un parámetro $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$. Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Sin embargo, observe que la solución trivial $y = 0$ es una solución singular dado que no es miembro de la familia $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$; no existe forma de asignar un valor a la constante c para obtener $y = 0$.

■ **Sistemas de ecuaciones diferenciales** Hasta este momento hemos analizado ecuaciones diferenciales individuales que contienen una función desconocida. Sin embargo con frecuencia, tanto en la teoría como en muchas aplicaciones, encontramos sistemas de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** está formado por dos o más ecuaciones que involucran las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente. Por ejemplo, si x y y simbolizan variables dependientes y t representa la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden estaría dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Una **solución** para un sistema como el (9) sería un par de funciones diferenciables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, definidas sobre un intervalo común I, que satisfagan a cada ecuación del sistema localizada en este intervalo. Consulte los problemas 33 y 34 de los ejercicios 1.1.

Comentarios

i) Es pertinente formular algunos comentarios finales acerca de las soluciones implícitas de ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 3 resolvimos la relación $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x para obtener dos soluciones explícitas, $\phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $\phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, de la ecuación diferencial (8). Sin embargo, no analice demasiado este ejemplo. A menos que le resulte sencillo, evidente, sea importante o se le indique, por lo general no es necesario intentar resolver una solución implícita $G(x, y) = 0$ para y de forma explícita en términos de x. Asimismo, no interprete mal el segundo enunciado posterior a la definición 1.1.3. Una solución implícita $G(x, y) = 0$ puede definir una función ϕ perfectamente diferenciable que sea una solución de una ED, aunque no podamos resolver $G(x, y) = 0$ utilizando métodos analíticos como álgebra. La curva de solución de ϕ puede ser un segmento o parte de la gráfica de $G(x, y) = 0$. Revise los problemas 41 y 42 de los ejercicios 1.1. Además, consulte el análisis que sigue al ejemplo 4 de la sección 2.2.

ii) A pesar de que en esta sección se ha enfatizado el concepto de una solución, recuerde que una ED no necesariamente debe contar con una solución. Observe el problema 35 de los ejercicios 1.1. La cuestión de la existencia de una solución será analizada en la siguiente sección.

iii) Puede no resultar evidente si una EDO de primer orden presentada en forma diferencial $M(x, y)$ $dx + N(x, y)dy = 0$ es lineal o no, pues no existe nada en esta notación que nos indique el símbolo que representa la variable dependiente. Consulte los problemas 9 y 10 de los ejercicios 1.1.
iv) Pareciera que no hay mayor problema en suponer que $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ pueda resolverse para $y^{(n)}$, sin embargo deberá tener cuidado con esto. Existen excepciones y algunos inconvenientes relacionados con esta suposición. Revise los problemas 48 y 49 de los ejercicios 1.1.
v) Si *toda* solución de una EDO de n-ésimo orden $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ sobre un intervalo I puede obtenerse a partir de una familia $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ de n parámetros mediante la elección adecuada de los parámetros c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces decimos que la familia representa la **solución general** de la ED. Al resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales debemos imponer restricciones relativamente simples sobre los coeficientes de la ecuación; mediante estas restricciones podemos asegurarnos de que no sólo existe una solución sobre un intervalo, sino que también una familia de soluciones arrojará todas las posibles soluciones. Las ecuaciones no lineales, con excepción de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo general son difíciles de resolver si no imposibles, en términos de *funciones elementales* familiares: combinaciones finitas de potencias enteras de x, raíces, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. Además, si se obtiene una familia de soluciones para una ecuación no lineal, no será evidente si esta familia contiene todas las soluciones. Por lo tanto, en un nivel práctico, la denominación "solución general" se aplica sólo a ecuaciones diferenciales lineales. Ahora no se preocupe por este concepto, pero tenga presentes las palabras "solución general", ya que regresaremos a ellas en la sección 2.3 y una vez más en el capítulo 3.

1.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 8, defina el orden de la ecuación diferencial presentada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal al compararla con (6).

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r + u)$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

7. $(\operatorname{sen} \theta)y''' - (\cos \theta)y' = 2$

8. $\ddot{x} - (1 - \frac{1}{3}\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$

En los problemas 9 y 10, determine si la ecuación diferencial de primer orden presentada es lineal en la variable dependiente indicada comparándola con la primera ecuación diferencial proporcionada en (7).

9. $(y^2 - 1)\, dx + x\, dy = 0$; en y; en x

10. $u\,dv + (v + uv - ue^u)\, du = 0$; en v; en u

En los problemas 11 a 14, verifique si la función indicada es una solución explícita de la ecuación diferencial presentada. Suponga un intervalo de definición I adecuado para cada solución.

11. $2y' + y = 0$; $\quad y = e^{2x/2}$

12. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24$; $\quad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

13. $y'' - 6y' + 13y = 0$; $\quad y = e^{3x}\cos 2x$

14. $y'' + y = \tan x$; $\quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

En los problemas 15 a 18, verifique si la función señalada $y = \phi(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden presentada. Proceda igual que en el ejemplo 2, considerando a ϕ sólo como una *función*, proporcione su dominio. Luego considere a ϕ como una *solución* de la ecuación diferencial, establezca al menos un intervalo I de definición.

15. $(y - x)y' = y - x + 8$; $\quad y = x + 4\sqrt{x + 2}$

16. $y' = 25 + y^2$; $\quad y = 5 \tan 5x$

17. $y' = 2xy^2$; $\quad y = 1/(4 - x^2)$

18. $2y' = y^3 \cos x$; $\quad y = (1 - \operatorname{sen} x)^{-1/2}$

En los problemas 19 y 20, verifique si la expresión señalada es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden que se proporciona. Encuentre al menos una solución explícita $y = \phi(x)$ en cada caso. Utilice alguna herramienta de graficación para obtener la gráfica de una solución explícita. Proporcione un intervalo I de definición para cada solución ϕ.

19. $\dfrac{dX}{dt} = (X - 1)(1 - 2X)$; $\quad \ln\left(\dfrac{2X - 1}{X - 1}\right) = t$

20. $2xy\, dx + (x^2 - y)\, dy = 0$; $\quad -2x^2y + y^2 = 1$

En los problemas 21 a 24, verifique si la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial que se proporciona. Suponga un intervalo de definición I adecuado para cada solución.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P)$; $\quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

22. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1e^{-x^2}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

24. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;$

$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$

25. Verifique si la función definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

26. En el ejemplo 3 observamos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ son soluciones de $dy/dx = -x/y$ sobre el intervalo $(-5, 5)$. Explique por qué la función definida en segmentos

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

no es una solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo $(-5, 5)$.

27. Encuentre valores de m apropiados para que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial proporcionada. Explique su razonamiento.

a) $y' + 2y = 0$ ***b***) $y'' - 5y' + 6y = 0$

28. Encuentre valores de m apropiados para que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial proporcionada. Explique su razonamiento.

a) $xy'' + 2y' = 0$ ***b***) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

En los problemas 29 a 32, utilice el concepto de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$, es una función constante si y sólo si, $y' = 0$ para determinar si la ecuación diferencial proporcionada tiene soluciones constantes.

29. $3xy' + 5y = 10$ **30.** $y' = y^2 + 2y - 3$

31. $(y - 1)y' = 1$ **32.** $y'' + 4y' + 6y = 10$

En los problemas 33 y 34, verifique si el par de funciones indicadas es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

33. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y,$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t},$

$y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t,$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}e^t,$

$y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^t$

Problemas de análisis

35. Construya una ecuación diferencial que no cuente con soluciones reales.

36. Construya una ecuación diferencial de la que usted esté seguro que tiene únicamente la solución trivial $y = 0$. Explique su razonamiento.

37. ¿Cuál es la función que a partir de cálculo usted sabe que su primera derivada es la propia función? ¿Y que su primera derivada es un múltiplo constante k de la propia función? Escriba cada respuesta en forma de una ecuación diferencial de primer orden con una solución.

38. ¿Cuál es la función (o funciones) que a partir de cálculo usted sabe que su segunda derivada es la propia función? ¿Y que su segunda derivada es el negativo de la misma función? Escriba cada respuesta en forma de una ecuación diferencial de segundo orden con una solución.

39. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$. Encuentre un intervalo de definición I. [*Sugerencia: I no* es el intervalo $(-\infty, \infty)$.]

40. Analice por qué tiene sentido suponer que la ecuación diferencial lineal $y'' + 2y' + 4y = 5 \operatorname{sen} t$ cuenta con una solución del tipo $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$, donde A y B son constantes. Luego encuentre las constantes A y B específicas de modo que $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$ sea una solución particular de la ED.

En los problemas 41 y 42, la figura dada representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ define implícitamente diversas soluciones de la ED. Con cuidado, reproduzca cada figura en una hoja de papel. Utilice lápices de distinto color para marcar los segmentos o partes de cada gráfica que correspondan a las gráficas de las soluciones. Recuerde que una solución ϕ debe ser una función y además diferenciable. Utilice la curva de solución para estimar el intervalo I de definición de cada solución ϕ.

41.

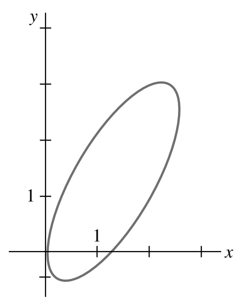


FIGURA 1.1.5 Gráfica del problema 41

42.

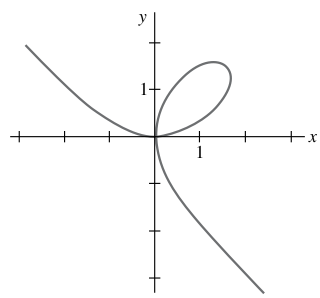


FIGURA 1.1.6 Gráfica del problema 42

43. Las gráficas de los miembros de la familia de un parámetro $x^3 + y^3 = 3cxy$ se denominan **folia de Descartes**. Verifique si esta familia es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}.$$

44. La gráfica de la **FIGURA 1.1.6** representa al miembro de la familia de folia del problema 43 que corresponde a $c = 1$. Analice lo siguiente: ¿cómo puede la ED del problema 43 ayudarnos a encontrar puntos sobre la gráfica de $x^3 + y^3 =$

3xy donde la línea tangente sea vertical? ¿De qué forma nos ayuda conocer el lugar donde una línea tangente es vertical para determinar un intervalo de definición I de una solución ϕ de la ED? Compare sus ideas con sus estimaciones de los intervalos del problema 42.

45. En el ejemplo 3, el intervalo I más largo sobre el que las soluciones explícitas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se encuentran definidas es el intervalo abierto $(-5, 5)$. ¿Por qué el intervalo I de definición no puede ser el intervalo cerrado $[-5, 5]$?

46. En el problema 21 se proporciona una familia de soluciones de un parámetro para la ED $P' = P(1 - P)$. ¿Alguna curva de solución cruza a través del punto (0, 3)? ¿Y a través del punto (0, 1)?

47. Analice e ilustre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de las formas $dy/dx = f(x)$ y $d^2y/dx^2 = f(x)$.

48. La ecuación diferencial $x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$ presenta la forma señalada en (4). Determine si la ecuación puede expresarse en la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

49. La forma normal (5) de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es equivalente a (4) siempre que las dos formas cuenten con exactamente las mismas soluciones. Construya una ecuación diferencial de primer orden para la que $F(x, y, y') = 0$ no sea equivalente a la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

50. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ para la que $y = c_1x + c_2x^2$ sea una familia de soluciones de dos parámetros. Asegúrese de que su ecuación no contenga los parámetros arbitrarios c_1 y c_2.

Con frecuencia es posible obtener información cualitativa sobre una solución $y = \phi(x)$ de una ecuación diferencial a partir de la propia ecuación. Antes de iniciar con los problemas 51 a 54, recuerde el significado geométrico de las derivadas dy/dx y d^2y/dx^2.

51. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = e^{-x^2}$.

a) Explique por qué una solución de una ED debe ser una función creciente sobre todo intervalo del eje x.

b) ¿Cuáles son $\lim_{x\to-\infty} dy/dx$ y $\lim_{x\to\infty} dy/dx$? ¿Qué sugiere esto acerca de una curva de solución cuando $x \to \pm\infty$?

c) Determine un intervalo sobre el cual una curva de solución sea cóncava hacia abajo y un intervalo sobre el que la curva sea cóncava hacia arriba.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ para la ecuación diferencial cuya forma es sugerida por los incisos *a*) a *c*).

52. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = 5 - y$.

a) Ya sea por inspección visual o con el método sugerido en los problemas 29 a 32, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilice únicamente la ecuación diferencial para encontrar intervalos en el eje y sobre los cuales una solución no constante $y = \phi(x)$ sea creciente. Encuentre intervalos en el eje y sobre los que $y = \phi(x)$ sea decreciente.

53. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.

a) Ya sea por inspección visual o con el método sugerido en los problemas 29 a 32, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilice sólo la ecuación diferencial para encontrar intervalos en el eje y sobre los que una solución no constante $y = \phi(x)$ sea creciente; también, sobre los cuales $y = \phi(x)$ sea decreciente.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = a/2b$ es la coordenada y de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

d) Sobre los mismos ejes de coordenadas, trace las gráficas de las soluciones de dos constantes identificadas en el inciso *a*). Estas soluciones constantes dividen el plano xy en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma esté sugerida por los resultados de los incisos *b*) y *c*).

54. Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explique por qué no existen soluciones constantes de la ED.

b) Describa la gráfica de una solución $y = \phi(x)$. Por ejemplo, ¿una curva de solución puede tener algún extremo relativo?

c) Explique por qué $y = 0$ es la coordenada y de un punto de inflexión de una curva de solución.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma esté sugerida en los incisos *a*) a *c*).

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 55 y 56, utilice un programa computacional para calcular todas las derivadas y realizar las reducciones necesarias a fin de verificar que la función indicada representa una solución particular de la ecuación diferencial dada.

55. $y^{(4)} - 20y''' + 158y'' - 580y' + 841y = 0;$
$y = xe^{5x}\cos 2x$

56. $x^3y''' + 2x^2y'' + 20xy' - 78y = 0;$
$$y = 20\,\frac{\cos(5\ln x)}{x} - 3\,\frac{\operatorname{sen}(5\ln x)}{x}$$

1.2 Problemas de valor inicial

Introducción Con frecuencia enfrentamos problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales establecidas, es decir, condiciones impuestas sobre la incógnita $y(x)$ o sobre sus derivadas. En esta sección analizamos uno de estos problemas denominado *problema de valor inicial*.

■ **Problema de valor inicial** En cierto intervalo I que contiene a x_0, el problema de

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ &\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas de forma arbitraria, se denomina **problema de valor inicial (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se denominan **condiciones iniciales**.

■ **Problemas de valor inicial de primero y segundo orden** El problema presentado en (1) también se denomina **problema de valor inicial de n-ésimo orden**. Por ejemplo,

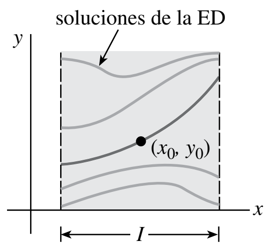


FIGURA 1.2.1 PVI de primer orden

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

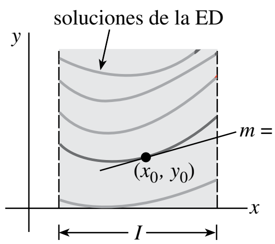


FIGURA 1.2.2 PVI de segundo orden

son problemas de valores iniciales de primero y segundo orden, respectivamente. Estos dos problemas resultan sencillos de interpretar en términos geométricos. Para (2) buscamos una solución de la ecuación diferencial sobre un intervalo I que contenga a x_0 de modo que una curva de solución cruce a través del punto establecido (x_0, y_0). Observe la **FIGURA 1.2.1**. Para (3) requerimos encontrar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no sólo cruce por (x_0, y_0), sino que también cruce en forma tal que la pendiente de la curva en este punto sea y_1. Vea la **FIGURA 1.2.2**. El término *condición inicial* se deriva de los sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan, respectivamente, la posición y la velocidad de un objeto en algún principio, o tiempo inicial, t_0.

Resolver un problema de valor inicial de n-ésimo orden con frecuencia implica utilizar una familia de soluciones de n parámetros de la ecuación diferencial dada para encontrar n constantes especializadas, de modo que la solución particular resultante de la ecuación también "ajuste" (satisfaga) las n condiciones iniciales.

EJEMPLO 1 Problemas de valor inicial de primer orden

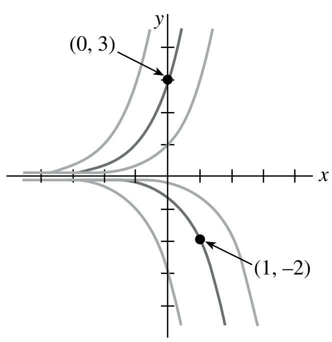


FIGURA 1.2.3 Soluciones de problemas de valor inicial en el ejemplo 1

Es posible verificar de forma simple que $y = ce^x$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación sencilla de primer orden $y' = y$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si especificamos una condición inicial, digamos $y(0) = 3$, al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia se determina la constante $3 = ce^0 = c$. Por lo tanto, la función $y = 3e^x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Ahora, si precisamos que una solución de la ecuación diferencial atraviese el punto $(1, -2)$ en lugar de $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ arrojará $-2 = ce$ o $c = -2e^{-1}$. La función $y = -2e^{x-1}$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

Las gráficas de estas dos funciones se muestran en la **FIGURA 1.2.3**. ≡

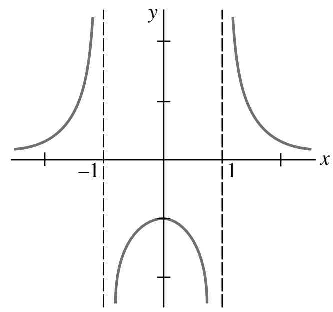
El siguiente ejemplo ilustra otro problema de valor inicial de primer orden. Aquí, observe cómo el intervalo de definición I de la solución $y(x)$ depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Intervalo *I* de definición de una solución

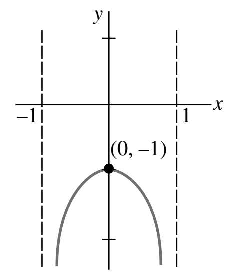
En el problema 6 de los ejercicios 2.2 se le solicitará mostrar que una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = 1/$

$(x^2 + c)$. Si imponemos la condición inicial $y(0) = -1$ entonces, al sustituir $x = 0$ y $y = -1$ en la familia de soluciones obtenemos $-1 = 1/c$ o $c = -1$. De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$. Ahora enfaticemos las siguientes tres diferencias.

- Considerado como una *función*, el dominio de $y = 1/(x^2 - 1)$ es el conjunto de números reales x para el que se define $y(x)$; éste es el conjunto de todos los números reales con excepción de $x = -1$ y $x = 1$. Observe la **FIGURA 1.2.4*a***).
- Considerado como una *solución de la ecuación diferencial* $y' + 2xy^2 = 0$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría tomarse como cualquier intervalo sobre el que $y(x)$ estuviera definida y fuera diferenciable. Como puede observarse en la figura 1.2.4*a*), los intervalos más grandes en los que $y = 1/(x^2 - 1)$ representa una solución son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.
- Considerado como una *solución del problema de valor inicial* $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría ser cualquier intervalo sobre el cual $y(x)$ estuviera definida, fuera diferenciable y contuviera el punto inicial $x = 0$; el intervalo más grande para el que esto es verdadero es $(-1, 1)$. Véase la figura 1.2.4*b*). ≡



a) Función definida para toda x excepto $x = \pm 1$



b) Solución definida sobre el intervalo que contiene a $x = 0$

FIGURA 1.2.4 Gráficas de la función y la solución del PVI del ejemplo 2

Revise los problemas 3 a 6 de los ejercicios 1.2 como una continuación del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Problema de valor inicial de segundo orden

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 observamos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para $x'' + 16x = 0$. Encuentre una solución del problema de valor inicial

$$x'' + 16x = 0, \quad x(\pi/2) = -2, \quad x'(\pi/2) = 1. \tag{4}$$

Solución Primero aplicamos $x(\pi/2) = -2$ a la familia de soluciones dada: $c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$. En vista de que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, encontramos que $c_1 = -2$. A continuación aplicamos $x'(\pi/2) = 1$ a la familia de un parámetro $x(t) = -2 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$. Si derivamos y luego establecemos $t = \pi/2$ y $x' = 1$, obtenemos $8 \operatorname{sen} 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, a partir de lo cual podemos observar que $c_2 = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$ es una solución de (4). ≡

Existencia y unicidad Al considerar un problema de valor inicial surgen dos preguntas importantes:

¿Existe una solución del problema? Si la hay, ¿es única?

Para un problema de valor inicial como el de (2), nos preguntamos:

Existencia $\begin{cases} \text{¿La ecuación diferencial } dy/dx = f(x, y) \text{ cuenta con soluciones?} \\ \text{¿Alguna de las curvas de solución atraviesan el punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Unicidad $\begin{cases} \text{¿En qué momento podemos estar seguros de que existe precisamente una} \\ \text{curva de solución atravesando el punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Observe que en los ejemplos 1 y 3 se utiliza la frase "*una* solución" en lugar de "*la* solución" del problema. El artículo indefinido "una" se aplica de forma deliberada para sugerir la posibilidad de que existan otras soluciones. En este punto no se ha demostrado que exista una sola solución para cada problema. El siguiente ejemplo ilustra un problema de valor inicial con dos soluciones.

EJEMPLO 4 Un problema de valor inicial puede tener varias soluciones

Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, de modo que el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(0) = 0$, cuenta con al menos dos soluciones. Como se ilustra en la **FIGURA 1.2.5**, las gráficas de ambas funciones cruzan a través del mismo punto $(0, 0)$. ≡

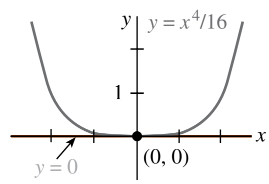


FIGURA 1.2.5 Dos soluciones de un mismo PVI en el ejemplo 4

Dentro de los límites de un curso formal de ecuaciones diferenciales podemos estar seguros de que la *mayoría* de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y de que las soluciones a los problemas de valor inicial *probablemente* serán únicas. Sin embargo, en la vida real, no es así. Por ello resulta conveniente saber con anticipación al intentar resolver un problema de valor inicial, si existe una solución y, de ser así, si es la única solución al problema. Dado que vamos a considerar ecuaciones diferenciales de primer orden en los siguientes dos capítulos, estableceremos aquí, sin demostración, un teorema directo que ofrece las suficientes condiciones como para garantizar la existencia y unicidad de una solución al problema de valor inicial de primer orden de la forma presentada en (2). Tendremos que esperar al capítulo 3 para abordar la cuestión de la existencia y unicidad de un problema de valor inicial de segundo orden.

Teorema 1.2.1 Existencia de una solución única

Establecemos R como una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, la cual contiene al punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe cierto intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$ definida en I_0 que representa una solución del problema de valor inicial (2).

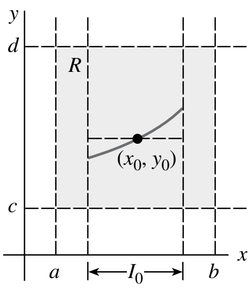


FIGURA 1.2.6 Región rectangular R

La conclusión anterior es uno de los teoremas más relevantes y populares que existen para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que los criterios de continuidad de $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son relativamente sencillos de verificar. La geometría del teorema 1.2.1 se ilustra en la **FIGURA 1.2.6**.

EJEMPLO 5 Vuelta al ejemplo 3

En el ejemplo 3 observamos que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ posee al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por (0, 0). El análisis de las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

muestra que éstas son continuas en la mitad del plano superior definido por $y > 0$. Así, el teorema 1.2.1 nos permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$, en la mitad del plano superior existe cierto intervalo con centro en x_0 sobre el cual la ecuación diferencial tiene una solución única. De tal modo, por ejemplo, incluso sin resolverlo, sabemos que existe cierto intervalo centrado en 2 sobre el cual el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ tiene una solución única. ≡

En el ejemplo 1, el teorema 1.2.1 garantiza que no existen otras soluciones al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$ distintas a $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto se deriva del hecho de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ son continuas en la totalidad del plano xy. Además puede demostrarse que el intervalo I sobre el que cada solución se encuentra definida es $(-\infty, \infty)$.

Intervalo de existencia y unicidad Suponga que $y(x)$ representa una solución al problema de valor inicial (2). Los siguientes tres conjuntos sobre el eje real x pueden no ser iguales: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I sobre el cual la solución $y(x)$ se encuentra definida o existe, y el intervalo I_0 de existencia *y* unicidad. En el ejemplo 2 de la sección 1.1 ilustramos la diferencia que hay entre el dominio de una función y el intervalo de definición I. Ahora supongamos que (x_0, y_0) es un punto situado al interior de la región rectangular R del teorema 1.2.1. Resulta que la continuidad de la función $f(x, y)$ sobre R es suficiente por sí misma para garantizar la existencia de al menos una solución de $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definida sobre algún intervalo I. El intervalo de definición I para este problema de valor inicial se toma, por lo general, como el intervalo más grande que contiene a x_0 sobre el que la solución $y(x)$ está definida y es diferenciable. El intervalo I depende tanto de $f(x, y)$ como de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Revise los problemas 31 a 34 dados en los ejercicios 1.2. La condición adicional de continuidad de la primera derivada parcial $\partial f/\partial y$ sobre R nos permite afirmar que no sólo existe una solución sobre algún intervalo I_0 que contiene a x_0, sino que además se trata de la *única* solución que satisface a $y(x_0) = y_0$. Sin embargo, el teorema 1.2.1 no ofrece ninguna información acerca del tamaño de los intervalos I e I_0; *el intervalo de definición I no requiere ser tan amplio como la región R y el intervalo I_0 de existencia y unicidad puede no ser tan amplio como I.* El número $h > 0$ que define al intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 - h)$, puede ser muy pequeño y por lo tanto es mejor considerar que la solución $y(x)$ es *única en un sentido local*, es decir, una solución definida cerca del punto (x_0, y_0). Consulte el problema 44 de los ejercicios 1.2.

Comentarios

i) Las condiciones del teorema 1.2.1 son suficientes pero no necesarias. Cuando $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas sobre una región rectangular R, siempre debe concluirse que una solución de (2) existe y es única mientras (x_0, y_0) sea un punto al interior de R. Sin embargo, cuando las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema 1.2.1 no se mantienen, entonces podría suceder que: el problema (2) aún *pueda* tener una solución y esta solución *pueda* ser única, o (2) *pueda* tener varias soluciones o no tener solución alguna. Una revisión del ejemplo 4 muestra que la hipótesis del teorema 1.2.1 no se sostiene sobre la línea $y = 0$ para la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$, y por lo tanto no sorprende que, como vimos en el ejemplo 3 de esta sección, existan dos soluciones definidas sobre un intervalo común $(-h, h)$ que satisfacen $y(0) = 0$. Por otro lado, las hipótesis del teorema 1.2.1 no se sostienen sobre la línea $y = 1$ para la ecuación diferencial $dy/dx = |y - 1|$. No obstante, puede demostrarse que la solución del problema de valor inicial $dy/dx = |y - 1|$, $y(0) = 1$, es única. ¿Puede adivinar esta solución?

ii) Se recomienda leer, analizar, responder y recordar posteriormente el problema 43 de los ejercicios 1.2.

1.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 y 2, $y = 1/(1 + c_1e^{-x})$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que incluya esta ecuación diferencial y la condición inicial proporcionada.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$ **2.** $y(-1) = 2$

En los problemas 3 a 6, $y = 1/(x^2 + c)$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ED de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que incluya esta ecuación diferencial y la condición inicial dada. Proporcione el intervalo I más grande sobre el que se encuentra definida la solución.

3. $y(2) = \frac{1}{3}$ **4.** $y(-2) = \frac{1}{2}$

5. $y(0) = 1$ **6.** $y(\frac{1}{2}) = -4$

En los problemas 7 a 10, $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para la ED de segundo orden ED $x'' + x = 0$. Encuentre una solución del PVI de segundo orden que incluya esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7. $x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

En los problemas 11 a 14, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Encuentre una solución del PVI de segundo orden que incluya esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

11. $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

12. $y(1) = 0, \quad y'(1) = e$

13. $y(-1) = 5, \quad y'(-1) = -5$

14. $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

En los problemas 15 y 16, determine mediante inspección visual al menos dos soluciones para el PVI de primer orden que se presenta.

15. $y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$ **16.** $xy' = 2y, \quad y(0) = 0$

En los problemas 17 a 24, determine una región del plano xy para la cual la ecuación diferencial proporcionada cuente con una solución única cuya gráfica cruce el punto (x_0, y_0) dentro de la región.

17. $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$ **18.** $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x\dfrac{dy}{dx} = y$ **20.** $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

21. $(4 - y^2)y' = x^2$ **22.** $(1 + y^3)y' = x^2$

23. $(x^2 + y^2)y' = y^2$ **24.** $(y - x)y' = y + x$

En los problemas 25 a 28, determine si el teorema 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ posee una solución única a través del punto proporcionado.

25. $(1, 4)$ **26.** $(5, 3)$

27. $(2, -3)$ **28.** $(-1, 1)$

29. ***a***) Mediante inspección visual, encuentre una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $xy' = y$. Verifique si cada miembro de la familia es una solución del problema de valor inicial $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Justifique el inciso *a*) mediante la determinación de una región R dentro del plano xy para la cual la ecuación diferencial $xy' = y$ tenga una solución única a través del punto (x_0, y_0) dentro de R.

c) Verifique si la función segmentada

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisface la condición $y(0) = 0$. Determine si esta función también es una solución para el problema de valor inicial del inciso *a*).

30. ***a***) Verifique si $y = \tan(x + c)$ es una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

b) Dado que $f(x, y) = 1 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo momento, la región R del teorema 1.2.1 puede considerarse equivalente a todo el plano xy. Utilice la familia de soluciones del inciso *a*) para encontrar una solución explícita al problema de valor inicial de primer orden $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Y aunque $x_0 = 0$ se encuentra dentro del intervalo $(-2, 2)$, explique por qué la solución no está definida en este intervalo.

c) Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial del inciso *b*).

31. ***a***) Verifique si $y = -1/(x + c)$ es una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y' = y^2$.

b) Dado que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo momento, la región R del teorema 1.2.1 puede considerarse equivalente a todo el plano xy. A partir de la familia del inciso *a*), encuentre una solución que satisfaga $y(0) = 1$, y otra que satisfaga $y(0) = -1$. Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial.

32. ***a***) A partir de la familia del inciso *a*) del problema 31, encuentre una solución que satisfaga $y' = y^2$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 \neq 0$. Explique por qué el intervalo de definición I más amplio para esta solución es $(-\infty, 1/y_0)$ o $(1/y_0, \infty)$.

b) Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial de primer orden $y' = y^2$, $y(0) = 0$.

33. ***a***) Verifique si $3x^2 - y^2 = c$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y\,dy/dx = 3x$.

b) A mano, trace la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Encuentre todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso *a*) definidas mediante esta relación. Proporcione el intervalo de definición I para cada solución explícita.

c) El punto $(-2, 3)$ se encuentra sobre la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$, ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso *b*) satisface $y(-2) = 3$?

34. ***a***) Utilice la familia de soluciones del inciso *a*) del problema 33 para encontrar una solución implícita del problema de valor inicial $y\,dy/dx = 3x$, $y(2) = -4$. Luego, a mano, trace la gráfica de la solución explícita de este problema y proporcione su intervalo de definición I.

b) ¿Existe alguna solución explícita de $y\,dy/dx = 3x$ que cruce el origen?

En los problemas 35 a 38 se proporciona la gráfica de un miembro de la familia de soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$. Haga coincidir la curva de solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

a) $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$
b) $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -4$
c) $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
d) $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
e) $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$
f) $y(0) = -4$, $y'(0) = -2$

35.

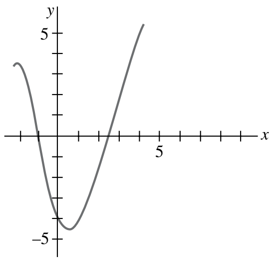


FIGURA 1.2.7 Gráfica del problema 35

36.

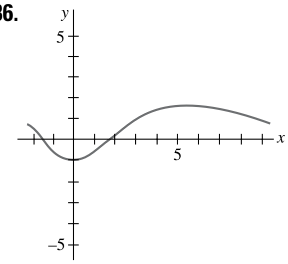


FIGURA 1.2.8 Gráfica del problema 36

37.

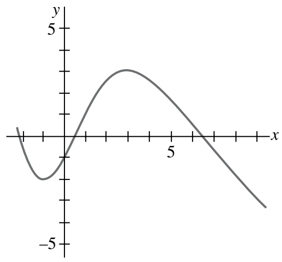


FIGURA 1.2.9 Gráfica del problema 37

38.

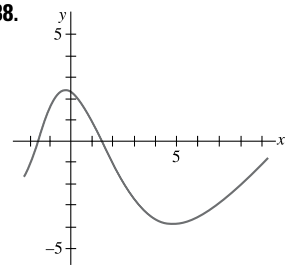


FIGURA 1.2.10 Gráfica del problema 38

≡ Problemas de análisis

En los problemas 39 y 40, utilice el problema 47 de los ejercicios 1.1 y los incisos (2) y (3) de esta sección.

39. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica en todo punto (x, y) cuente con la pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y tenga la intercepción y (0, 9).

40. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya segunda derivada sea $y'' = 12x - 2$ en cada punto (x, y) sobre su gráfica y $y = -x + 5$ sea tangente a la gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$.

41. Considere el problema de valor inicial $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine cuál de las dos curvas que presenta la **FIGURA 1.2.11** es la única curva de solución viable. Explique su razonamiento.

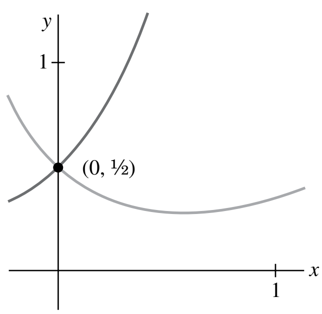


FIGURA 1.2.11 Gráfica del problema 41

42. Determine un valor posible de x_0 para el que la gráfica de la solución del problema de valor inicial $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ sea tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

43. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ posee una familia de soluciones de un parámetro y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en cierta región rectangular R del plano xy. Explique por qué no es posible que dos curvas de solución distintas se intersequen o sean tangentes entre sí en el punto (x_0, y_0) en R.

44. Las funciones

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4, \; -\infty < x < \infty$$

y

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \tfrac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

cuentan con el mismo dominio pero, evidentemente, son distintas. Observe las **FIGURAS 1.2.12*a*)** y 1.2.12*b*), respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado del ejemplo 5.

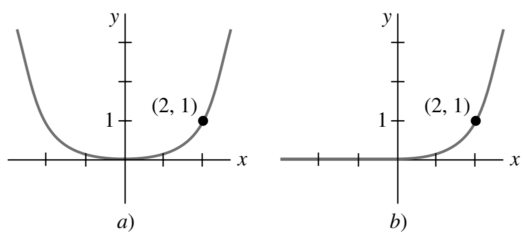


FIGURA 1.2.12 Dos soluciones para el PVI del problema 44

Modelo matemático

45. Crecimiento poblacional A partir de la siguiente sección observaremos que las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para describir o *modelar* diversos sistemas físicos. En este problema, suponga que se presenta un modelo del crecimiento poblacional de una pequeña comunidad por medio del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de individuos que hay en la comunidad y t es el tiempo medido en años. ¿Qué tan rápido, es decir, a qué ritmo se incrementa la población en $t = 0$? ¿A qué velocidad crece cuando es de 500 individuos?

1.3 Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Introducción En esta sección presentaremos la noción de *modelo matemático*. En términos generales, un modelo matemático es una descripción matemática de algo. Dicha descripción puede ser algo tan simple como una función. Por ejemplo, al analizar la caída de gotas de agua y las marcas que dejan sobre papel secante, Leonardo da Vinci dedujo que la velocidad de caída de un cuerpo está dada por $v = gt$. A pesar de que existen muchos tipos de modelos matemáticos, en esta sección nos concentraremos únicamente en ecuaciones diferenciales y analizaremos algunos modelos específicos de ecuaciones diferenciales aplicadas en áreas como biología, física y química. Una vez que hayamos analizado algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales en los capítulos 2 y 3 regresaremos, para resolverlos, a algunos de dichos modelos.

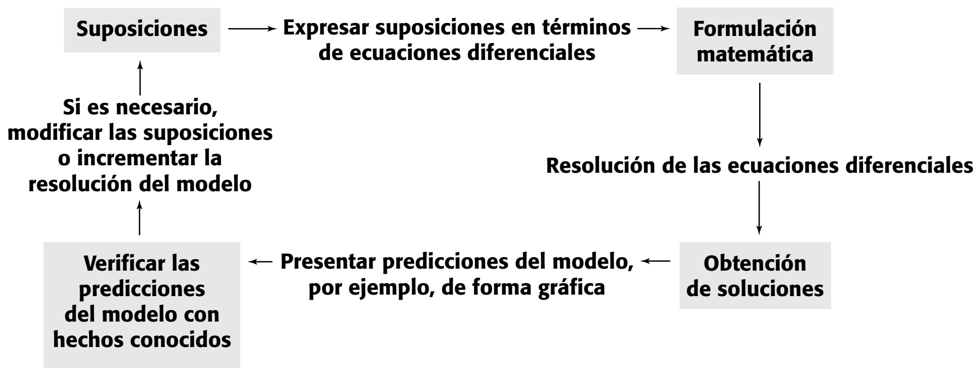
Modelos matemáticos Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico, o incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático**, el cual se construye con ciertos objetivos en mente. Por ejemplo, es posible que deseemos comprender los mecanismos presentes detrás de cierto ecosistema aplicándonos al estudio del crecimiento de las poblaciones animales localizadas en dicho sistema, o fechar un fósil por medio del análisis de la degeneración de una sustancia radiactiva contenida en él o en el estrato donde se descubrió.

La construcción de un modelo matemático de un sistema inicia con la *identificación de las variables* responsables del cambio que se produzca en el sistema. Es posible que al principio decidamos no incorporar todas estas variables en el modelo. En este primer paso se especifica el **nivel de resolución** del modelo. A continuación, *formulamos un conjunto de premisas razonables* o hipótesis acerca del sistema que intentamos describir. Tales supuestos también incluirán cualquier ley empírica aplicable al sistema.

Para ciertos propósitos es perfectamente razonable aceptar modelos de baja resolución. Por ejemplo, podemos estar conscientes de que para modelar el movimiento de un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza de desaceleración correspondiente a la fricción del aire ocasionalmente se ignora en los cursos básicos de física; sin embargo, para un científico cuya labor es predecir de manera precisa la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, la resistencia del aire y otros factores como la curvatura de la Tierra tienen que ser tomados en cuenta.

Ya que las suposiciones acerca de un sistema con frecuencia implican una *tasa de cambio* de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones puede implicar una o más ecuaciones que involucren *derivadas*. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez formulado un modelo matemático equivalente a una ecuación diferencial o a un sistema de ecuaciones diferenciales, se enfrenta el no menos importante problema de intentar resolverlo. *Si* podemos solucionarlo, entonces consideramos que el modelo será razonable cuando su solución sea consistente con datos experimentales o con hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Pero si las predicciones generadas por la solución no son adecuadas, podemos incrementar el nivel de resolución del modelo o formular premisas alternativas sobre los mecanismos causantes del cambio en el sistema. Los pasos del proceso de modelación se muestran en el siguiente diagrama.



Evidentemente, al incrementar la resolución se eleva la complejidad del modelo matemático y aumenta la probabilidad de que no podamos obtener una solución explícita.

Un modelo matemático de un sistema físico incluye, por lo general, a la variable de tiempo t. Una solución del modelo presentará entonces el **estado del sistema**; en otras palabras, para valores apropiados de t, los valores de la variable (o variables) dependiente describen al sistema en el pasado, el presente y el futuro.

Dinámicas de población Uno de los primeros intentos por modelar el **crecimiento poblacional** humano mediante las matemáticas fue realizado por el economista inglés Thomas Malthus, en 1798. Básicamente, la idea del modelo de Malthus representa la suposición de que el ritmo con que la población de un país crece en cierto tiempo es proporcional* a su población total en ese tiempo. En otras palabras, mientras más personas existan en el tiempo t, más serán en el futuro. En términos matemáticos, si $P(t)$ indica la población total en el tiempo t, entonces tal suposición puede expresarse como

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. A pesar de que este sencillo modelo no toma en cuenta muchos factores (por ejemplo, inmigración y emigración) que pueden influir sobre las poblaciones humanas para su crecimiento o disminución, resultó ser bastante preciso para predecir la población de Estados Unidos durante los años de 1790 a 1860. Las poblaciones que crecen a un ritmo descrito por (1) son raras, sin embargo, todavía se utiliza (1) para modelar el *crecimiento de pequeñas poblaciones durante breves intervalos de tiempo*, por ejemplo, el crecimiento de bacterias en cajas de Petri.

Decaimiento radiactivo El núcleo de un átomo está compuesto por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de tales combinaciones son inestables, es decir, los átomos decaen o transmutan en átomos de otra sustancia. Se dice que dichos núcleos inestables son

* Si dos cantidades u y v son proporcionales, esto se denota como $u \propto v$, lo cual significa que una cantidad es un múltiplo constante de la otra: $u = kv$.

radiactivos. Por ejemplo, con el tiempo el radio, que es altamente radiactivo, Ra-226, se transmuta en el gas radiactivo radón, Rn-222. En la modelación del fenómeno de **decaimiento radiactivo**, se supone que la velocidad dA/dt con que el núcleo de una sustancia decae es proporcional a la cantidad (en términos más precisos, al número de núcleos) $A(t)$ de la sustancia remanente en el tiempo t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Por supuesto, las ecuaciones (1) y (2) son idénticas; la diferencia sólo se encuentra en la interpretación de los símbolos y las constantes de proporcionalidad. Para el crecimiento, como se espera de (1), $k > 0$, y para el caso de (2) y el decaimiento, $k < 0$.

El modelo (1) para el crecimiento puede verse como la ecuación $dS/dt = rS$, la cual describe el crecimiento del capital S cuando una tasa de interés anual r se capitaliza de forma continua. El modelo (2) de decaimiento también se presenta en un entorno biológico, como el de la determinación de la vida media de un medicamento —el tiempo que toma para que 50% de éste se elimine del cuerpo por excreción o mediante el metabolismo—. En química, el modelo de decaimiento (2) se presenta como la descripción matemática de una reacción química de primer orden. El argumento es el siguiente:

Una sola ecuación diferencial puede actuar como modelo matemático para muchos fenómenos distintos.

Los modelos matemáticos con frecuencia vienen acompañados de ciertas condiciones secundarias. Por ejemplo, en (1) y (2) esperaríamos conocer, respectivamente, una población inicial P_0 y una cantidad inicial de sustancia radiactiva A_0 disponible. Si tal punto inicial en el tiempo se toma como $t = 0$, entonces sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$. En otras palabras, un modelo matemático puede consistir en un problema de valor inicial o, como veremos posteriormente en la sección 3.9, en un problema de valor en la frontera.

■ **Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento** De acuerdo con la **ley empírica de enfriamiento de Newton** —o de calentamiento—, la velocidad con que la temperatura de un cuerpo cambia es proporcional a la diferencia que hay entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, la denominada temperatura ambiental. Si $T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el momento t, T_m la temperatura del medio que lo rodea y dT/dt la velocidad a la que cambia la temperatura del cuerpo, la ley de Newton de enfriamiento y calentamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En cualquier caso, calentamiento o enfriamiento, si T_m es una constante, se sostiene que $k < 0$.

■ **Difusión de una enfermedad** Una enfermedad contagiosa —por ejemplo, un virus de gripe— se difunde en una comunidad por medio del contacto físico entre las personas. Si $x(t)$ indica el número de personas que han tenido contacto con la enfermedad y $y(t)$ el número de personas que no han sido expuestas a ésta, parece razonable suponer que la razón dx/dt a la que se difunde la enfermedad es proporcional al número de encuentros o *interacciones* entre estos dos grupos de gente. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, es decir, proporcional al producto xy, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

donde k es la constante acostumbrada de proporcionalidad. Suponga una pequeña comunidad que cuenta con una población fija de n personas. Si una persona infectada se introduce en esta comunidad, entonces puede sostenerse que $x(t)$ y $y(t)$ se encuentran relacionados por $x + y = n + 1$. Al utilizar esta última ecuación para eliminar a y en (4) obtendremos el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{5}$$

Una condición inicial evidente que acompaña a la ecuación (5) es $x(0) = 1$.

■ **Reacciones químicas** La desintegración de una sustancia radiactiva, controlada por la ecuación diferencial (2), se dice que es una **reacción de primer orden**. En química, pocas reacciones siguen esta misma ley empírica: si las moléculas de una sustancia A se descomponen en moléculas más pequeñas, resulta natural suponer que la velocidad a la que se lleva a cabo esta descomposición será proporcional a la cantidad de la primera sustancia que no ha experimentado conversión; es decir, si $X(t)$ es la cantidad de sustancia A que permanece en cualquier momento, entonces $dX/dt = kX$, donde k es una constante negativa dado que X está disminuyendo. Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión de cloruro de t-butilo en alcohol t-butílico:

$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Únicamente la concentración de cloruro de t-butilo controla la velocidad de reacción. Pero en la reacción

$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl,$$

por cada molécula de cloruro de metilo se consume una molécula de hidróxido de sodio, formando así una molécula de alcohol metílico y una molécula de cloruro de sodio. En dicho caso, la tasa a la que se lleva a cabo la reacción es proporcional al producto de las concentraciones restantes de CH_3Cl y NaOH. Si X indica la cantidad de CH_3OH formada y α y β son las cantidades dadas de los primeros dos químicos A y B, entonces las cantidades instantáneas no convertidas al químico C son $\alpha - X$ y $\beta - X$, respectivamente. Por lo tanto, la velocidad de formación de C está dada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{6}$$

donde k representa una constante de proporcionalidad. Se dice que una reacción cuyo modelo está dado por la ecuación (6) es de **segundo orden**.

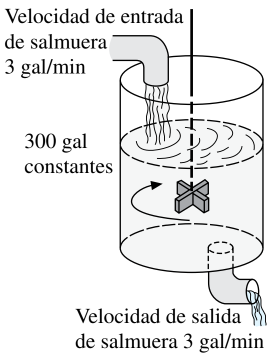


FIGURA 1.3.1 Tanque de mezcla

■ **Mezclas** La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden para la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque grande a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Observe la **FIGURA 1.3.1**. Si $A(t)$ indica la cantidad de sal (medida en libras) que hay en el tanque en el momento t, entonces la velocidad a que $A(t)$ cambia será una tasa neta de:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de sal}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{salida de sal}\end{pmatrix} = R_{entrada} - R_{salida}. \tag{7}$$

La velocidad de entrada $R_{entrada}$ a la que ingresa la sal al tanque es el producto de la concentración de sal del flujo de entrada y la velocidad del fluido de entrada. Observe que $R_{entrada}$ se mide en libras por minuto

$$R_{entrada} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Concentración de sal del flujo de entrada de}}}{(2\text{ lb/gal})} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Velocidad de salmuera}}}{(3\text{ gal/min})} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Velocidad de entrada de sal}}}{(6\text{ lb/min})}.$$

Ahora, como la solución está siendo bombeada hacia fuera del tanque a la misma velocidad a la que ingresa, la cantidad de galones de salmuera que hay dentro del tanque en el tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo tanto, la concentración de sal dentro del tanque, así como en el flujo de salida, es $c(t) = A(t)/300$ lb/gal, y la velocidad de salida R_{salida} de sal es

$$R_{salida} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Concentración de sal del flujo de entrada de}}}{\left(\frac{A(t)}{300}\text{ lb/gal}\right)} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Velocidad de salmuera}}}{(3\text{ gal/min})} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Velocidad de entrada de sal}}}{\frac{A(t)}{100}\text{ lb/min}}.$$

Entonces, la velocidad neta (7) se convierte en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \qquad \text{o} \qquad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \tag{8}$$

Si $r_{entrada}$ y r_{salida} indican las velocidades de entrada y salida de las soluciones de salmuera,* entonces existen tres posibilidades $r_{entrada} = r_{salida}$, $r_{entrada} > r_{salida}$ y $r_{entrada} < r_{salida}$. En el análisis que llevó a (8) suponemos que $r_{entrada} = r_{salida}$. En los últimos dos casos, dentro del tanque, la cantidad de galones de salmuera está aumentando ($r_{entrada} > r_{salida}$) o disminuyendo ($r_{entrada} < r_{salida}$) a la velocidad neta $r_{entrada} - r_{salida}$. Véanse los problemas 10 a 12 de los ejercicios 1.3.

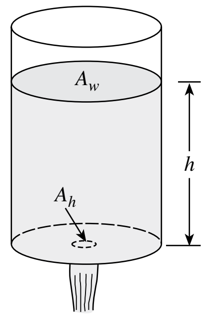


FIGURA 1.3.2 Agua drenando de un tanque

■ **Drenado de un tanque** En hidrodinámica, la **ley de Torricelli** establece que la velocidad v de flujo de salida de agua a través de un orificio plano ubicado en la parte inferior de un tanque lleno hasta una altura h será igual a la velocidad que un cuerpo (en este caso una gota de agua) adquiriría en caída libre desde una altura h; es decir, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta última expresión proviene de la ecuación de energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ con la energía potencial mgh y resolviendo para v. Suponga que un tanque lleno de agua puede drenar mediante un orificio bajo la influencia de la gravedad. Deseamos encontrar la altura h del agua restante en el tanque en el tiempo t. Considere el tanque mostrado en la **FIGURA 1.3.2**. Si el área del orificio es A_h (en pies^2) y la velocidad del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$ (en pies/s), entonces el volumen del agua que abandona el tanque por segundo es $A_h\sqrt{2gh}$ (en pies^3/s). De este modo, si $V(t)$ indica el volumen del agua que hay en el tanque en el tiempo t,

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

donde el signo negativo indica que V disminuye. Observe que aquí ignoramos la posibilidad de fricción en el orificio, la cual puede ocasionar una reducción en la velocidad del flujo en dicho lugar. Ahora, si el tanque es tal que el volumen de agua en el tiempo t puede expresarse como $V(t) = A_w h$, donde A_w (en pies^2) representa el área *constante* de la superficie superior del agua (véase figura 1.3.2), entonces $dV/dt = A_w dh/dt$. Al sustituir esta última expresión en (9) obtenemos la ecuación diferencial deseada para la altura del agua en el tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

Resulta interesante observar que la ecuación (10) sigue siendo válida incluso cuando A_w no es constante. En este caso, debemos expresar el área de la superficie superior del agua como una función h, es decir, $A_w = A(h)$. Véase el problema 14 en los ejercicios 1.3.

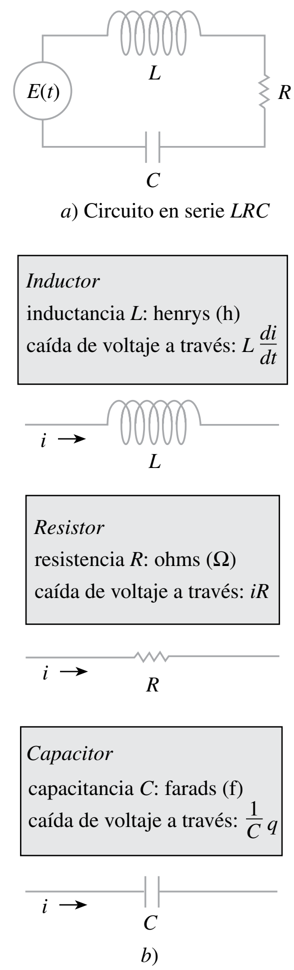


FIGURA 1.3.3 La corriente $i(t)$ y la carga $q(t)$ se miden en amperes (A) y coulombs (C), respectivamente

■ **Circuitos en serie** Considere el circuito en serie simple, o de lazo sencillo, que contiene al inductor, resistor y capacitor mostrados en la **FIGURA 1.3.3*a*)**. La corriente que circula en un circuito después que el interruptor se cierra se representa mediante $i(t)$; la carga sobre un capacitor en el tiempo t está señalada como $q(t)$. Las letras L, C y R representan inductancia, capacitancia y resistencia, respectivamente, y por lo general son constantes. Ahora, de acuerdo con la **segunda ley de Kirchhoff**, el voltaje $E(t)$ que se genera en un lazo cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el lazo. La figura 1.3.3*b*) también muestra los símbolos y las fórmulas apropiadas para señalar las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$, presente en el capacitor, mediante $i = dq/dt$, al sumar las tres caídas de voltaje

$$\begin{array}{ccc} \text{Inductor} & \text{Resistor} & \text{Capacitor} \\ L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}, & iR = R\dfrac{dq}{dt}, & \dfrac{1}{C}q \end{array}$$

e igualar la suma al voltaje impreso, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{11}$$

Examinaremos con mayor detalle una ecuación diferencial análoga a la (11) en la sección 3.8.

■ **Caída libre** Al construir el modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se desplaza en un campo de fuerza, muchas veces se empieza con la segunda ley de Newton del

---

* No confundir estos símbolos con $R_{entrada}$ y R_{salida}, los cuales representan las velocidades de entrada y salida de *sal*.

movimiento. Recuerde de sus conocimientos de física básica que la **primera ley de Newton para el movimiento** afirma que un cuerpo puede permanecer en reposo o continuar moviéndose a velocidad constante a menos que actúe sobre él una fuerza externa. En cada caso, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas $F = \Sigma F_k$; es decir, el resultado neto o la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es cero, entonces la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley de Newton para el movimiento** indica: cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es igual a cero, entonces esta fuerza neta es proporcional a su aceleración a, o más exactamente, $F = ma$, donde m representa la masa del cuerpo.

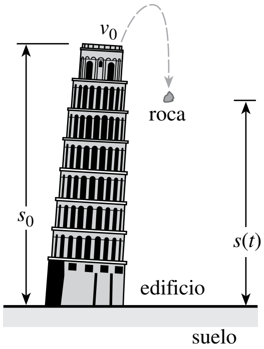


FIGURA 1.3.4 Posición de la roca medida en función del nivel del suelo

Ahora suponga que una roca es arrojada hacia arriba desde el techo de un edificio, como ilustra la **FIGURA 1.3.4**. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la roca en relación con el suelo en el tiempo t? La aceleración de la roca es la segunda derivada d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección ascendente es positiva y que ninguna fuerza actúa sobre la roca salvo la fuerza de gravedad, entonces la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{12}$$

En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $F = F_1 = -W$ de la roca cerca de la superficie de la Tierra. Recuerde que la magnitud del peso es $W = mg$, donde m es la masa del cuerpo y g la aceleración debida a la gravedad. En (12), el signo negativo se debe a que el peso de la roca es una fuerza dirigida hacia abajo, lo cual es contrario a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces s se determina a partir del problema de valor inicial de segundo orden

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \qquad s(0) = s_0,\ s'(0) = v_0. \tag{13}$$

Aunque no hemos resaltado las soluciones de las ecuaciones construidas, observamos que (13) puede resolverse integrando la constante $-g$ dos veces con respecto a t. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración. Usted podrá reconocer la solución de (13) utilizando conocimientos de física básica como la fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.

■ **Caída de cuerpos y resistencia del aire** Antes del famoso experimento de Galileo realizado en la Torre inclinada de Pisa, la mayoría de las personas creía que en caída libre los objetos más pesados, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos más ligeros, como una pluma. Desde luego, cuando se lanzaban simultáneamente una bala de cañón y una pluma desde la misma altura, *sí* caían a diferentes velocidades, pero no debido a que la bala de cañón fuera más pesada. La diferencia en las velocidades se debe a la resistencia del aire. La fuerza resistiva del aire se ignora en el modelo dado en (13). Bajo las mismas circunstancias, un cuerpo de masa m cayendo, como una pluma con baja densidad y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si tomamos, en esta circunstancia, la dirección positiva como orientada hacia abajo, entonces la fuerza neta que actúa sobre la masa estará dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, llamada **amortiguación viscosa**, que actúa en dirección opuesta o ascendente. Véase la **FIGURA 1.3.5**. Ahora, como v está relacionada con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton se convierte en $F = ma = m\,dv/dt$. Al igualar la fuerza neta de esta forma con la segunda ley de Newton se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo en el tiempo t,

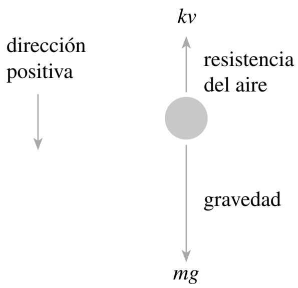


FIGURA 1.3.5 Cuerpo de masa m que cae

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{14}$$

En esta expresión k es una constante positiva de proporcionalidad llamada **coeficiente de arrastre**. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo recorre al caer en el tiempo t desde su punto inicial de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, (14) es una ecuación diferencial de segundo orden

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg. \tag{15}$$

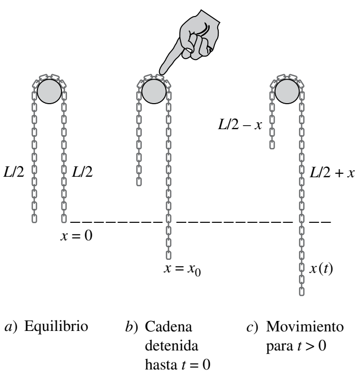


FIGURA 1.3.6 Cadena que se desliza sin fricción sobre una polea

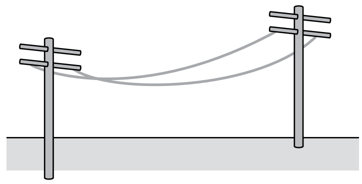
■ **Cadena que se desliza** Suponga que una cadena uniforme de longitud en pies L está suspendida sobre una polea metálica clavada a la pared por encima del nivel del suelo. Asuma que la polea carece de fricción y que la cadena pesa ρ lb/ft. La **FIGURA 1.3.6*a*)** ilustra la posición en que la cadena cuelga en equilibrio; si se moviera un poco hacia la izquierda o la derecha, la cadena se desprendería de la polea. Suponga que la dirección positiva se considera descendente, y que $x(t)$ denota la distancia que el extremo derecho de la cadena recorrería cayendo en el tiempo t. La posición de equilibrio corresponde a $x = 0$. En la figura 1.3.6*b*) la cadena se desplaza una cantidad de x_0 pies y se sostiene en la polea hasta soltarse en un tiempo inicial que se designa como $t = 0$. Para la cadena en movimiento, como ilustra la figura 1.3.6*c*), tenemos las siguientes cantidades:

$$\textit{peso de la cadena:}\;\; W = (L \text{ ft})\,(\rho \text{ lb/ft}) = L\rho,$$
$$\textit{masa de la cadena:}\;\; m = W/g = L\rho/32$$
$$\textit{fuerza neta:}\;\; F = \left(\frac{L}{2} + x\right)\rho - \left(\frac{L}{2} - x\right)\rho = 2x\rho.$$

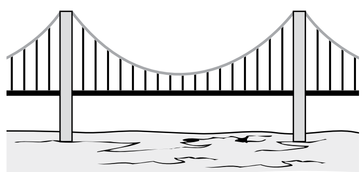
Dado que $a = d^2x/dt^2$, $ma = F$ se vuelve

$$\frac{L\rho}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = 2\rho x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{64}{L}x = 0. \tag{16}$$

Cables suspendidos Suponga que un cable flexible, un alambre o una cuerda pesada, está suspendido entre dos postes verticales. Ejemplos físicos de esto podrían ser un largo cable telefónico sujeto entre dos postes, **FIGURA 1.3.7*a*)** o dos cables que soportan el camino de un puente colgante, figura 1.3.7*b*). Nuestro objetivo es construir un modelo matemático para describir la forma que supone un cable de este tipo.



a) Cables telefónicos



b) Puente suspendido

FIGURA 1.3.7 Cables suspendidos entre postes verticales

Para comenzar, examinemos sólo una porción o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Como indica la parte a color de la **FIGURA 1.3.8**, este elemento del cable es la curva en un sistema coordinado rectangular con un eje y elegido para pasar entre el punto más bajo P_1 de la curva y el eje x elegido a unidades por debajo de P_1. Sobre el cable están actuando tres fuerzas: las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ presentes en el cable y que son tangentes a éste en P_1 y P_2, respectivamente, y la porción $\mathbf{W}$ de la carga vertical total entre los puntos P_1 y P_2. Digamos que $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$ y $W = |\mathbf{W}|$ denotan las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se distribuye entre componentes verticales y horizontales (cantidades escalares) $T_2 \cos\theta$ y $T_2 \operatorname{sen}\theta$. Debido al equilibrio estático, escribimos

$$T_1 = T_2 \cos\theta \quad \text{y} \quad W = T_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Al dividir la última ecuación entre la primera eliminamos T_2 y obtenemos $\tan\theta = W/T_1$. Pero como $dy/dx = \tan\theta$, llegamos a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}. \tag{17}$$

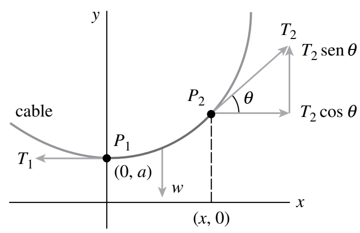


FIGURA 1.3.8 Elemento del cable

Esta simple ecuación diferencial de primer orden sirve como un modelo para la forma de un cable flexible tal como el cable telefónico que cuelga bajo su propio peso, al igual que para la forma de los cables que detienen el camino de un puente suspendido. Regresaremos a la ecuación (17) en los ejercicios 2.2 y en la sección 3.11.

Comentarios

Cada ejemplo de la presente sección ha descrito un sistema dinámico: uno que cambia o evoluciona con el paso del tiempo t. Como el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de las matemáticas que actualmente está en moda, relacionaremos de manera ocasional la terminología de tal área con el análisis en cuestión.

En términos más precisos, un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, llamadas **variables de estado**, junto con una regla que nos permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser un estado pasado, presente o futuro) en función de un estado prescrito en algún tiempo t_0. Los sistemas dinámicos se clasifican como sistemas de tiempo discreto o sistemas de tiempo continuo. En el presente curso nos ocuparemos sólo de los sistemas dinámicos de tiempo continuo —sistemas en los cuales *todas* las variables están definidas en un rango continuo de tiempo—. La regla o el modelo matemático de un sistema dinámico de tiempo continuo es una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales. El **estado del sistema** en un tiempo t es el valor de las variables de estado en ese tiempo; el estado específico del sistema en un tiempo t_0 lo constituyen simplemente las condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución al problema de valor inicial se conoce como **respuesta del sistema**. Por ejemplo, en el caso anterior del decaimiento radiactivo, la regla es $dA/dt = kA$. Ahora, si se conoce la cantidad de sustancia radiactiva en algún tiempo t_0, digamos $A(t_0) = A_0$, entonces, al resolver la regla, se sabrá que la respuesta del sistema para $t \geq t_0$ es $A(t) = A_0e^{(t-t_0)}$ (véase la sección 2.7). La respuesta $A(t)$ es la variable única de estado para este sistema. En el caso de la roca lanzada desde el techo de un edificio, la respuesta del sistema, la solución de la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -g$ sujeta al estado inicial $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, es la función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, $0 \leq t \leq T$, donde el símbolo T representa el momento en que la roca toca el suelo. Las variables de estado son $s(t)$ y $s'(t)$, las cuales representan, respectivamente, la posición vertical de la roca por encima del suelo y su velocidad en el tiempo t. La aceleración $s''(t)$ *no* es una variable de estado puesto que sólo necesitamos saber la posición y la velocidad iniciales en el tiempo t_0 para determinar únicamente la posición de la piedra $s(t)$ y la velocidad $s'(t) = v(t)$ para cualquier tiempo en el intervalo $[t_0, T]$. La aceleración $s''(t) = a(t)$, desde luego, está dada por la ecuación diferencial $s''(t) = -g$, $0 < t < T$.

Un último comentario: no todo sistema estudiado en este texto es un sistema dinámico. También examinaremos algunos sistemas estáticos en los cuales el modelo sea una ecuación diferencial.

1.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

Dinámica poblacional

1. Bajo los mismos supuestos en que se basa el modelo presentado en (1), determine una ecuación diferencial que establezca la población $P(t)$ de un país que permite la inmigración a una tasa constante $r > 0$. ¿Cuál será la ecuación diferencial apropiada para determinar la población $P(t)$ del país cuando se permite a los individuos emigrar a una tasa constante $r > 0$?
2. El modelo poblacional presentado en (1) no toma en cuenta la mortalidad; la tasa de crecimiento es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo referente a una población cambiante en una comunidad, se supone que la tasa a la cual cambia la población es una tasa *neta* —es decir, la diferencia entre la tasa de nacimientos y la tasa de muertes en la comunidad—. Determine un modelo poblacional $P(t)$ si tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad son proporcionales a la población presente en el tiempo t.
3. Mediante el concepto de tasa neta presentado en el problema 2, determine una ecuación diferencial que represente una población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente en el tiempo t pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente en el tiempo t.
4. Modifique el modelo del problema 3 para la tasa neta a la cual cambia la población $P(t)$ de cierta clase de pez, pero también suponga que el pez se cosecha a una tasa constante de $h > 0$.

Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento

5. Una taza de café se enfría según la ley de Newton para el enfriamiento (3). Use los datos de la gráfica de temperaturas $T(t)$ ilustrada en la **FIGURA 1.3.9** para estimar las constantes T_m, T_0 y k en un modelo del tipo de un problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad T(0) = T_0.$$

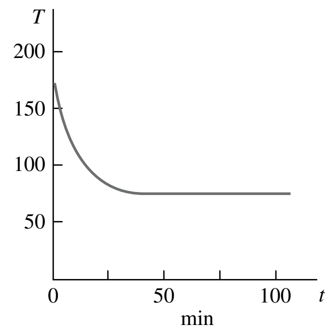


FIGURA 1.3.9 Curva de enfriamiento del problema 5

6. La temperatura ambiente T_m en (3) podría ser una función del tiempo t. Suponga que en un entorno controlado de manera artificial, $T_m(t)$ es periódica en un lapso de 24 horas, tal como ilustra la **FIGURA 1.3.10**. Diseñe un modelo matemático para la temperatura $T(t)$ de un cuerpo ubicado dentro de este entorno.

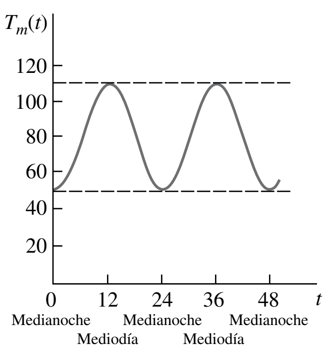


FIGURA 1.3.10 Temperatura ambiente del problema 6

Propagación de una enfermedad y tecnología

7. Suponga que un estudiante portador del virus de la gripe regresó a su campus universitario aislado con población de 1 000 estudiantes. Determine una ecuación diferencial para establecer el número de estudiantes $x(t)$ que han contraído la gripe si la tasa a la cual se propaga la enfermedad es proporcional al número de interacciones dadas entre la cantidad de estudiantes con gripe y los estudiantes que aún no han sido expuestos al virus.

8. En el tiempo $t = 0$, una innovación tecnológica se introduce en una comunidad con población fija de n personas. Determine una ecuación diferencial que establezca el número de personas $x(t)$ que ha adoptado la innovación en el tiempo t si se supone que la tasa a la cual se difunde la innovación entre la comunidad es proporcional, de forma conjunta, a la cantidad de gente que la ha adoptado y al resto que no la ha adoptado.

Mezclas

9. Suponga que un gran tanque mezclador contiene inicialmente 300 galones de agua en la cual se han disuelto 50 libras de sal. En el tanque se bombea agua pura a una velocidad de 3 galones por minuto, y cuando la disolución está bien mezclada, se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Determine una ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$ de sal presente en el tanque en el tiempo t. ¿Qué es $A(0)$?

10. Suponga que un gran tanque mezclador contiene inicialmente 300 galones de agua en la cual se han disuelto 50 libras de sal. Se bombea otra disolución salada en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto, y cuando la disolución está bien mezclada, se bombea hacia fuera a una velocidad *menor* de 2 galones por minuto. Si la contracción de la disolución entrante es de 2 lb/gal, determine una ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$ de sal presente en el tanque en el tiempo t.

11. En el problema 10, ¿cuál será la ecuación diferencial si la disolución bien mezclada se bombea hacia fuera a una velocidad *mayor* de 3.5 galones por minuto?

12. Generalice el modelo presentado en la expresión (8) suponiendo que el gran tanque contiene inicialmente un número N_0 de galones de salmuera; $r_{entrada}$ y r_{salida} son las velocidades de entrada y salida de la salmuera, respectivamente (medidas en galones por minuto); $c_{entrada}$ es la concentración de sal en el flujo de entrada; $c(t)$ es la concentración de sal en el tanque así como en el flujo de salida en el tiempo t (medida en libras de sal por galón), y $A(t)$ es la cantidad de sal presente en el tanque en el tiempo t.

Drenado de un tanque

13. Suponga que está goteando agua de un tanque a través de un orificio circular con área A_h localizado en el fondo. Cuando el agua gotea a través del orificio, la fricción y la concentración de la corriente cerca de él reducen el volumen del agua que se escapa del tanque por segundo a $cA_h\sqrt{2gh}$, donde $c(0 < c < 1)$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua en el tiempo t para el tanque cúbico de la **FIGURA 1.3.11**. El radio del orificio es de 2 pulgadas, $g = 32$ ft/s^2.

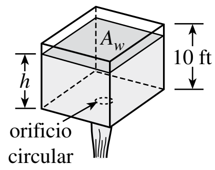


FIGURA 1.3.11 Tanque cúbico del problema 13

14. El tanque cónico circular recto que se muestra en la **FIGURA 1.3.12** pierde agua por un orificio circular localizado en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura del agua h en el tiempo t. El radio del orificio es de 2 pulgadas, $g = 32$ ft/s^2, y el factor de fricción/contracción que se presentó en el problema 13 es $c = 0.6$.

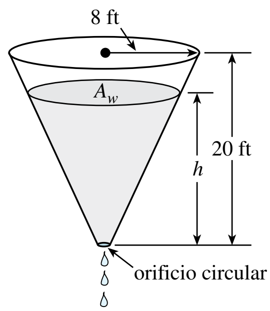


FIGURA 1.3.12 Tanque cónico del problema 14

Circuitos en serie

15. Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, tal como se muestra en la **FIGURA 1.3.13**. Determine una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje suministrado es $E(t)$.

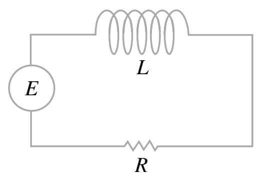


FIGURA 1.3.13 Circuito *LR* en serie para el problema 15

16. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, tal como se muestra en la **FIGURA 1.3.14**. Determine una ecuación diferencial para la carga $q(t)$ presente en el capacitor si la resistencia es R, la capacitancia es C, y el voltaje suministrado es $E(t)$.

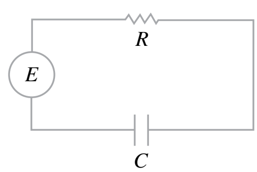


FIGURA 1.3.14 Circuito *RC* en serie para el problema 16

Caída libre y resistencia del aire

17. Para un movimiento de alta velocidad a través del aire, como el del paracaidista que se muestra en la **FIGURA 1.3.15** cayendo antes de que su paracaídas se abra, la resistencia del aire es más cercana a la velocidad instantánea $v(t)$ exponencial. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo que cae con una masa m si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

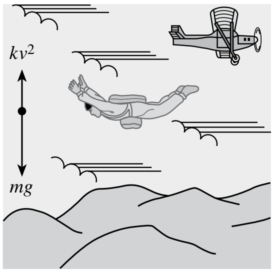


FIGURA 1.3.15 La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad en el problema 17

Segunda ley de Newton y el principio de Arquímedes

18. Un barril cilíndrico de s pies de diámetro con peso de w lb está flotando en el agua, como lo muestra la **FIGURA 1.3.16*a*)**. Después de un hundimiento inicial, el barril exhibe un movimiento oscilante hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una línea vertical. Mediante la figura 1.3.16*b*), determine una ecuación diferencial para el desplazamiento vertical $y(t)$ si se considera que el origen está sobre el eje vertical en la superficie del agua cuando el barril está en reposo. Use el **principio de Arquímedes**: la flotabilidad, o la fuerza ascendente del agua sobre el barril, es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la dirección descendente es positiva, que la densidad del agua es de 62.4 lb/ft^3, y que no hay resistencia entre el barril y el agua.

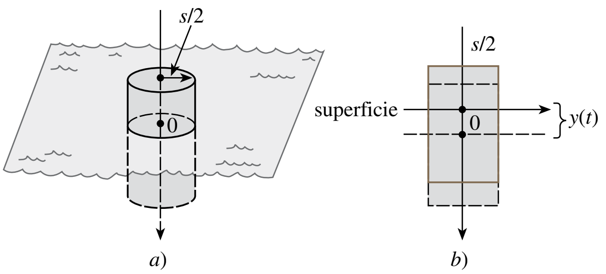


FIGURA 1.3.16 Movimiento oscilante hacia arriba y hacia abajo de un barril flotante para el problema 18

Segunda ley de Newton y ley de Hooke

19. Luego de que una masa m se ata a un resorte, éste se estira s unidades y después cuelga en reposo en la posición de equilibrio que muestra la **FIGURA 1.3.17*b*)**. Después de que el sistema resorte/masa se ha puesto en movimiento, hagamos que $x(t)$ denote la distancia dirigida de la masa más allá de la posición de equilibrio. Tal como indica la figura 1.3.17*c*), suponga que la dirección descendente es positiva y que el movimiento se presenta en línea recta vertical a través del centro de gravedad de la masa, y que las únicas fuerzas actuantes sobre el sistema son el peso de la masa y la fuerza de recuperación del resorte estirado. Aplique la **ley de Hooke**: la fuerza de recuperación de un resorte es proporcional a su elongación total. Determine una ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ en el tiempo t.

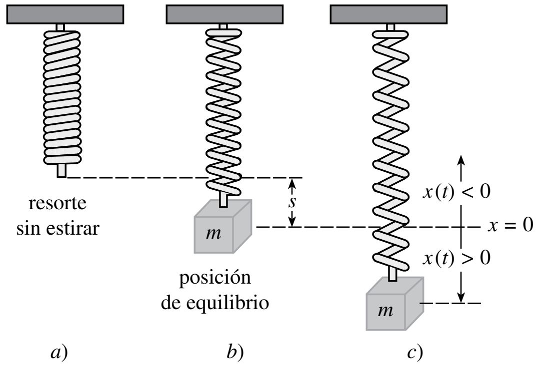


FIGURA 1.3.17 Sistema resorte/masa del problema 19

20. En el problema 19, ¿cuál será una ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ si el movimiento se presenta en un medio que imparte una fuerza viscosa, sobre el sistema resorte/masa, que es proporcional a la velocidad instantánea de la masa y actúa en dirección opuesta a la del movimiento?

Segunda ley de Newton y masa variable

Cuando la masa m de un cuerpo que se mueve a través de un campo de fuerza es variable, la **segunda ley de Newton** establece: si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es diferente de cero, entonces la fuerza neta F es igual a la tasa de cambio del *momentum* (cantidad del movimiento) del cuerpo con respecto al tiempo. Es decir,

$$F = \frac{d}{dt}(mv),^* \tag{18}$$

donde mv es el *momentum* (cantidad del movimiento). Aplique esta formulación de la segunda ley de Newton en los problemas 21 y 22.

21. Una cadena de 10 pies de largo está enrollada holgadamente sobre el piso. Como lo muestra la **FIGURA 1.3.18**, un extremo de la cadena se jala verticalmente hacia arriba con una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 lb/ft. Determine una ecuación diferencial para el peso $x(t)$ del extremo localizado por encima del nivel del piso en el tiempo t. Suponga que la dirección positiva es ascendente.

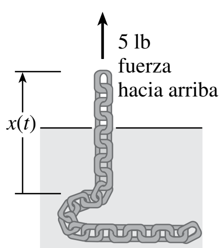


FIGURA 1.3.18 Cadena jalada hacia arriba, problema 21

* Observe que cuando m es constante, es lo mismo que $F = ma$.

22. Una cadena uniforme de longitud L, medida en pies, se sostiene verticalmente de manera que el extremo inferior apenas toca el piso como ilustra la **FIGURA 1.3.19**. La cadena pesa 2 lb/ft. El extremo superior sostenido y en reposo se suelta en $t = 0$ y la cadena cae directo hacia abajo. Ignore la resistencia del aire, suponga que la dirección positiva es descendente, y permita que $x(t)$ denote la longitud de la cadena sobre el piso en el tiempo t. Use el hecho de que la fuerza neta F, representada en (18) y que actúa sobre la cadena en el tiempo $t \geq 0$, es la constante $2L$ y muestre que una ecuación diferencial para $x(t)$ es

$$(L - x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Lg.$$

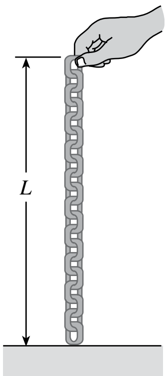


FIGURA 1.3.19 Cadena sostenida verticalmente, problema 22

Segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

23. Por virtud de la **ley de Newton de la gravitación universal**, la aceleración a de la caída libre de un cuerpo, como el del satélite mostrado en la **FIGURA 1.3.20**, cayendo desde una gran distancia hacia la superficie terrestre *no* es la constante g. En vez de ello, la aceleración a es inversamente proporcional a la distancia elevada al cuadrado a partir del centro de la Tierra, $a = k/r^2$, donde k es la constante de proporcionalidad. Para determinar k, use el hecho de que en la superficie terrestre $r = R$ y $a = g$. Si la dirección positiva es ascendente, aplique la segunda ley de Newton y su ley de la gravitación universal para encontrar una ecuación diferencial para la distancia r.

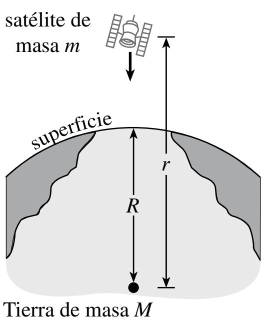


FIGURA 1.3.20 El satélite del problema 23

24. Suponga que se taladra un orificio hasta el centro de la Tierra y que una bola de boliche de masa m se deja caer dentro, como lo muestra la **FIGURA 1.3.21**. Construya un modelo matemático que describa el movimiento de la bola. En el tiempo t establezcamos: r indica la distancia desde el centro de la Tierra hasta la masa m, M denota la masa de la Tierra, M_r representa la masa de la porción de la Tierra dentro de una esfera con radio r, y δ denota la densidad constante de la Tierra.

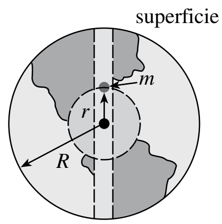


FIGURA 1.3.21 Abertura a través de la Tierra para el problema 24

Modelos matemáticos variados

25. Teoría del aprendizaje En la teoría del aprendizaje, se supone que la velocidad con que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad de material a memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de un tema a memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada en el tiempo t. Determine la ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$.

26. Olvido En el problema 25, suponga que la velocidad a la que el material se *olvida* es proporcional a la cantidad memorizada en el tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$ cuando se tome en cuenta el olvido.

27. Inyección de un medicamento Cierto medicamento se inyecta al torrente sanguíneo de un paciente a velocidad constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, el medicamento se elimina a una velocidad que es proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en el tiempo t. Determine una ecuación diferencial que establezca la cantidad $x(t)$.

28. Tractriz Una persona P, a partir del origen, se mueve en dirección del eje x positivo jalando un peso a lo largo de la curva C, llamada **tractriz**, como se muestra en la **FIGURA 1.3.22**. El peso, inicialmente ubicado en el eje y en $(0, s)$, se jala mediante una cuerda de longitud constante s que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuación diferencial para la ruta que sigue el movimiento. Suponga que la cuerda siempre es tangente a C.

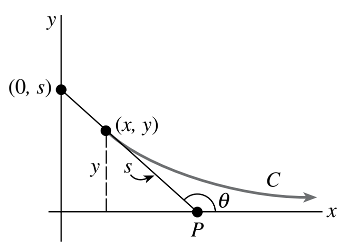


FIGURA 1.3.22 Curva tractriz del problema 28

29. Superficie reflejante Suponga que cuando la curva plana C mostrada en la **FIGURA 1.3.23** gira en torno al eje x genera una superficie de revolución con la propiedad de que todos los rayos luminosos L paralelos al eje x que golpean la superficie se reflejan en un solo punto O (el origen). Use el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecuación diferencial que describa la forma de la curva C. Tal curva C es importante en aplicaciones que comprenden desde la construcción de telescopios hasta antenas satelitales, faros de automóvil y recolectores solares [*Sugerencia:* La observación de la figura muestra que podemos escribir $\phi = 2\theta$. ¿Por qué? Ahora use una identidad trigonométrica adecuada.]

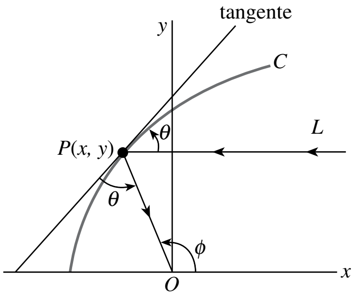


FIGURA 1.3.23 Superficie reflejante del problema 29

Problemas de análisis

30. Lea de nuevo el problema 37 en los ejercicios 1.1 y después ofrezca una solución explícita $P(t)$ para la ecuación (1). Encuentre una familia de soluciones de un solo parámetro de (1).

31. Lea nuevamente la oración que sigue a la ecuación (3) y suponga que T_m es una constante positiva. Analice por qué esperaríamos $k < 0$ en (3) en los casos de enfriamiento y calentamiento. Quizá comience por interpretar, digamos, $T(t) > T_m$ de una forma gráfica.

32. Lea otra vez el análisis que condujo a la ecuación (8). Si suponemos que al inicio el tanque contenía, digamos, 50 libras de sal, sería lógico pensar, puesto que la sal se está agregando al tanque de forma continua para $t > 0$, que $A(t)$ debe ser una función creciente. Con base en la ED, pero sin resolverla, analice cómo podría determinar el número de libras de sal que hay dentro del tanque después de un periodo largo.

33. **Modelo poblacional** La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, es un modelo de la población humana $P(t)$ de una comunidad determinada. Plantee una interpretación para resolver esta ecuación, es decir, ¿qué clase de población piensa usted que describe la ecuación diferencial?

34. **Fluido giratorio** Como se muestra en la **FIGURA 1.3.24*a*)**, un cilindro llenado parcialmente con fluido gira a una velocidad angular constante ω alrededor de un eje y vertical a través de su centro. El fluido giratorio es una superficie de revolución S. Para identificar S, primero establecemos un sistema de coordenadas consistente en un plano vertical determinado por el eje y y un eje x trazado perpendicular al eje y de manera que la intersección de los ejes (el origen) esté situada en el punto más bajo de la superficie S. Después buscamos una función $y = f(x)$, la cual representa la curva C de la intersección entre la superficie S y el plano coordinado vertical. Digamos que el punto $P(x, y)$ denota la posición de una partícula del fluido giratorio de masa m en el plano coordinado. Véase la figura 1.3.24*b*).

***a*)** En P, hay una fuerza de reacción de magnitud F debido a las demás partículas del fluido, esta fuerza es normal a la superficie S. En virtud de la segunda ley de Newton, la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre la partícula es $m\omega^2 x$. ¿Cuál es esta fuerza? Use la figura 1.3.24*b*) para analizar la naturaleza y el origen de las ecuaciones

$$F \cos \theta = mg, \qquad F \operatorname{sen} \theta = m\omega^2 x.$$

***b*)** Use el inciso *a*) para encontrar una ecuación diferencial de primer orden que defina la función $y = f(x)$.

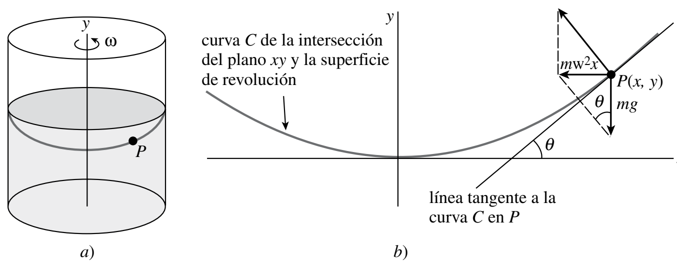


FIGURA 1.3.24 Fluido giratorio del problema 34

35. **Caída de un cuerpo** En el problema 23, suponga que $r = R + s$, donde s es la distancia de la superficie terrestre con respecto al cuerpo en caída. ¿Cómo se transforma la ecuación diferencial obtenida en el problema 23 cuando s es muy pequeña en comparación con R?

36. **Gotas de lluvia que caen** En meteorología, el término *virga* se refiere a la caída de gotas de lluvia o partículas de hielo que se evaporan antes de llegar al suelo. Suponga que una gota de lluvia típica tiene forma esférica. Comenzando en algún tiempo, designado como $t = 0$, una gota de radio r_0 cae de una nube desde el reposo y se empieza a evaporar.

***a*)** Si se supone que una gota se evapora de tal manera que su forma sigue siendo esférica, entonces es lógico suponer que la velocidad a la que ocurre la evaporación, es decir, la velocidad con que la gota pierde masa, es proporcional a su área superficial. Demuestre que este último supuesto implica que la velocidad de disminución del radio r de la gota es una constante. Encuentre $r(t)$. [*Sugerencia:* Vea el problema 47 en los ejercicios 1.1.]

***b*)** Si la dirección positiva es descendente, construya un modelo matemático para la velocidad v de una gota de lluvia que cae en el tiempo t. Ignore la resistencia del aire. [*Sugerencia:* Véase la introducción a los problemas 21 y 22.]

37. **Que nieve** El "problema del quitanieves" es un clásico y aparece en muchos textos sobre ecuaciones diferenciales, pero quizá se haya hecho famoso gracias a Ralph Palmer Agnew:

"Un día comenzó a nevar con gran intensidad y en forma permanente. Una máquina quitanieves empezó a funcionar a mediodía, a 2 millas durante la primera hora y a 1 milla la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?"

Si es posible, encuentre el texto titulado *Differential Equations*, de Ralph Palmer Agnew, McGraw-Hill, y después analice la construcción y solución del modelo matemático.

38. Lea de nuevo esta sección y clasifique cada modelo matemático como lineal o no lineal.

39. Dinámica poblacional Suponga que $P'(t) = 0.15\,P(t)$ representa un modelo matemático del crecimiento de cierto cultivo celular, donde $P(t)$ es el tamaño del cultivo (medido en millones de células) en el tiempo t (medido en horas). ¿Con cuánta rapidez crece el cultivo en el tiempo t cuando su tamaño llega a 2 millones de células?

40. Decaimiento radiactivo Suponga que

$$A'(t) = -0.0004332A(t)$$

representa un modelo matemático para el decaimiento del radio 226, donde $A(t)$ es la cantidad de radio (medido en gramos) restante en el tiempo t (medido en años). ¿Cuánta cantidad de radio resta en el tiempo t cuando la muestra está decayendo a una tasa de 0.002 gramos por año?

1 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 y 2, llene el espacio en blanco y después escriba ese resultado como una ecuación diferencial lineal de primer orden que no tenga el símbolo c_1 y cuya forma sea $dy/dx = f(x, y)$. Los símbolos c_1 y k representan constantes.

1. $\dfrac{d}{dx}c_1e^{kx} =$ ________________

2. $\dfrac{d}{dx}(5 + c_1e^{-2x}) =$ ________________

En los problemas 3 y 4, llene el espacio en blanco y después escriba ese resultado como una ecuación diferencial lineal de segundo orden sin los símbolos c_1 y c_2 y que tenga la forma $F(y, y'') = 0$. Los símbolos c_1, c_2 y k representan constantes.

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx) =$ ________________

4. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx) =$ ________________

En los problemas 5 y 6, calcule y' y y'' y después combine estas derivadas con y como una ecuación diferencial lineal de segundo orden sin los símbolos c_1 y c_2 y que tenga la forma $F(y, y', y'') = 0$. Los símbolos c_1 y c_2 representan constantes.

5. $y = c_1e^x + c_2xe^x$ **6.** $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

En los problemas 7 a 12, haga coincidir cada una de las ecuaciones diferenciales que se dan con una o más de estas soluciones:
a) $y = 0$, ***b***) $y = 2$, ***c***) $y = 2x$, ***d***) $y = 2x^2$.

7. $xy' = 2y$ **8.** $y' = 2$

9. $y' = 2y - 4$ **10.** $xy' = y$

11. $y'' + 9y = 18$ **12.** $xy'' - y' = 0$

En los problemas 13 y 14 determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial que se da.

13. $y'' = y'$ **14.** $y' = y(y - 3)$

En los problemas 15 y 16, interprete cada enunciado como una ecuación diferencial.

15. En la gráfica de $y = \phi(x)$, la pendiente de la línea tangente en el punto $P(x, y)$ es la distancia elevada al cuadrado desde $P(x, y)$ hasta el origen.

16. En la gráfica de $y = \phi(x)$, la tasa a la que la pendiente cambia con respecto a x en un punto $P(x, y)$ es la negativa de la pendiente de la línea tangente en $P(x, y)$.

17. ***a***) Proporcione el dominio de la función $y = x^{2/3}$.
b) Encuentre el intervalo I de definición más amplio sobre el que $y = x^{2/3}$ es una solución de la ecuación diferencial $3xy' - 2y = 0$.

18. ***a***) Verifique si la familia de un solo parámetro $y^2 - 2y = x^2 - x + c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $(2y - 2)y' = 2x - 1$.
b) Encuentre un miembro de la familia de un solo parámetro dada en el inciso *a*) que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.
c) Use el resultado que obtuvo en el inciso *b*) para encontrar una función explícita $y = \phi(x)$ que satisfaga $y(0) = 1$. Proporcione el dominio de ϕ. ¿Es $y = \phi(x)$ una *solución* del problema de valor inicial? Si es así, encuentre su intervalo I de definición; si no, explique.

19. Dado que $y = -\dfrac{2}{x} + x$ es una solución de la ED $xy' + y = 2x$. Encuentre x_0 y el intervalo I más amplio para el cual $y(x)$ es una solución del problema de valor inicial.

$$xy' + y = 2x, \qquad y(x_0) = 1.$$

20. Suponga que $y(x)$ denota una solución del problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = -1$ y que $y(x)$ posee al menos una segunda derivada en $x = 1$. En alguna cercanía de $x = 1$, use la ED para determinar si $y(x)$ es creciente o decreciente, y si la gráfica de $y(x)$ es cóncava ascendente o cóncava descendente.

21. Una ecuación diferencial puede poseer más de una familia de soluciones.
a) Grafique los diferentes miembros de las familias $y = \phi_1(x) = x^2 + c_1$ y $y = \phi_2(x) = -x^2 + c_2$.
b) Verifique si $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial no lineal de primer orden $(y')^2 = 4x^2$.
c) Construya una función definida en forma segmentada que sea solución de la ED no lineal del inciso *b*) pero que no sea miembro de cualquier familia de soluciones del inciso *a*).

22. ¿Cuál es la pendiente de la tangente en la gráfica de la solución de $y' = 6\sqrt{y} + 5x^3$ que pasa por $(-1, 4)$?

En los problemas 23 a 26, verifique si la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial dada. Proporcione un intervalo de definición I para cada solución.

23. $y'' + y = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} x$; $\quad y = x \operatorname{sen} x + x \cos x$

24. $y'' + y \sec x$; $\quad y = x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x)$

25. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\quad y = \operatorname{sen}(\ln x)$

26. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$;
$y = \cos(\ln x) \ln (\cos(\ln x)) + (\ln x) \operatorname{sen}(\ln x)$

27. La gráfica de una solución de un problema de valor inicial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$, $y(2) = y_0$, $y'(2) = y_1$, está dada en la **FIGURA 1.R.1**. Utilice esta gráfica para estimar los valores de y_0 y y_1.

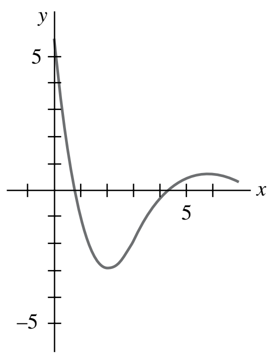
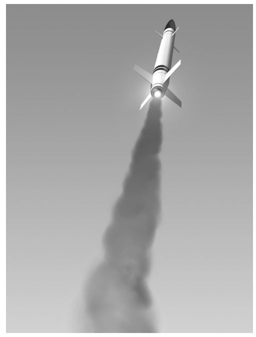


FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 27

28. Un tanque cilíndrico de 2 pies de radio y altura de 10 pies se llena a su máxima capacidad. Si inicialmente el tanque está lleno de agua, y el agua gotea por un orificio circular con radio de $\frac{1}{2}$ pulgada ubicado en el fondo, determine una ecuación diferencial para la altura h de agua en el tiempo t. Ignore la fricción y la contracción de agua en el orificio.

29. Considere un pequeño cohete lanzado verticalmente. Deje que $m(t)$ denote la masa total del cohete en el tiempo (t) (la cual es la suma de tres masas: la masa constante de la carga, la masa constante del vehículo y la cantidad variable de combustible). Si se supone que la dirección positiva es hacia arriba, la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea v del cohete y R es el empuje hacia arriba o la fuerza generada por el sistema de propulsión, encuentre un modelo matemático para la velocidad $v(t)$ del cohete. [*Sugerencia:* Véase (14) en la sección 1.3 y (18) en los ejercicios 1.3.]



Cohete del problema 29

30. En el problema 29, suponga que $m(t) = m_p + m_v + m_f(t)$, donde m_p es la masa constante de la carga, m_v es la masa constante del vehículo y $m_f(t)$ es la cantidad variable de combustible.

***a*)** Demuestre que la tasa a la cual cambia la masa total del cohete es la misma que la tasa a la cual cambia la masa del combustible.

***b*)** Si el cohete consume su combustible a una tasa constante λ, encuentre $m(t)$. Luego reescriba la ecuación diferencial del problema 29 en términos de λ y la masa total inicial $m(0) = m_0$.

***c*)** Bajo la suposición del inciso *b*), demuestre que el tiempo de agotamiento $t_b > 0$ del cohete, o el tiempo en el cual se consume el combustible, es $t_b = m_f(0)/\lambda$, donde $m_f(0)$ es la masa inicial del combustible.