

Capítulo 4

Relaciones diferenciales para una partícula fluida

Motivación. Cuando analizamos el movimiento de los fluidos podemos seguir dos caminos distintos: (1) buscar una estimación de los efectos globales (flujo másico, fuerza aplicada, intercambio de energía) sobre una región *finita* o volumen de control, o (2) analizar punto a punto los detalles del campo fluido analizando una región *infinitesimal* del flujo. El primer enfoque, de tipo global, se trató en el Capítulo 3.

Este capítulo trata de la segunda de las técnicas para analizar el movimiento de los fluidos: el análisis a pequeña escala, o *diferencial*. Esto es, aplicamos las cuatro leyes de conservación básicas a un volumen de control infinitesimal o, alternativamente, a un sistema fluido infinitesimal. En ambos casos se obtienen las *ecuaciones diferenciales* básicas del movimiento de un fluido. También se desarrollan las *condiciones de contorno* apropiadas.

En su forma más básica, estas ecuaciones diferenciales del movimiento son bastante difíciles de resolver, y se conoce muy poco sobre sus propiedades matemáticas generales. Sin embargo, se pueden mostrar ciertos aspectos que tienen un gran valor educativo. En primer lugar, como se muestra en el Capítulo 5, las ecuaciones (aunque no se resuelvan) revelan los parámetros adimensionales básicos que gobiernan el movimiento de los fluidos. En segundo lugar, como se muestra en el Capítulo 6, se puede encontrar un gran número de soluciones útiles si se hacen dos hipótesis simplificadoras: (1) flujo estacionario y (2) flujo incompresible. Una tercera simplificación bastante más drástica, la de flujo no viscoso, hace que sea válida la ecuación de Bernoulli y proporciona una gran variedad de soluciones ideales, o de *fluido perfecto*, posibles. Estos flujos idealizados se tratan en el Capítulo 8; se debe ser cuidadoso e indagar si estas soluciones son de hecho realistas cuando se comparan con el movimiento real del fluido. Finalmente, a pesar de su gran dificultad, las ecuaciones diferenciales generales se pueden resolver hoy en día mediante la técnica aproximada del *análisis numérico*, donde las derivadas se sustituyen por relaciones algebraicas entre un número finito de puntos del campo fluido que pueden resolverse posteriormente mediante un ordenador. La Referencia 1 es un ejemplo de un libro de texto dedicado íntegramente al análisis numérico del movimiento de los fluidos.

4.1. El campo de aceleraciones de un fluido

En la Sección 1.5 establecimos la forma vectorial cartesiana de un campo de velocidades función de la posición y del tiempo:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}u(x, y, z, t) + \mathbf{j}v(x, y, z, t) + \mathbf{k}w(x, y, z, t) \quad (1.4)$$

Esta es la variable más importante de la Mecánica de Fluidos. Conocer el campo de velocidades es a menudo equivalente a resolver el problema. Nuestras coordenadas están fijas en el espacio y observamos cómo pasa el fluido: como si hubiéramos tallado un conjunto de líneas de coordenadas sobre la ventana de cristal de un túnel de viento. Este es el método descriptivo euleriano, que es distinto al método lagrangiano, en el cual se sigue el movimiento de las partículas individuales.

La aceleración \mathbf{a} también es fundamental en Mecánica de Fluidos, ya que aparece al aplicar la segunda ley de Newton a un sistema fluido infinitesimal. Por tanto, necesitamos calcular la derivada total del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{i} \frac{du}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv}{dt} + \mathbf{k} \frac{dw}{dt}$$

Como cada componente escalar (u, v, w) es una función de las cuatro variables (x, y, z, t), utilizamos la regla de la cadena para obtener la derivada temporal de cada escalar. Por ejemplo,

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Pero, por definición, dx/dt es la componente u de la velocidad local, y $dy/dt = v$ y $dz/dt = w$. Así pues, la derivada total de u se puede escribir en la siguiente forma compacta:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u \quad (4.1)$$

Y sustituyendo u por v o w , se obtienen expresiones similares para dv/dt o dw/dt . Sumando estas expresiones para formar un vector, obtenemos la aceleración total:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right)}_{\text{Convectiva}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \quad (4.2)$$

El término $\partial \mathbf{V} / \partial t$ se denomina *aceleración local* y se anula cuando el flujo es estacionario, esto es, independiente del tiempo. Los tres términos entre paréntesis forman la *aceleración convectiva*, que aparece cuando la partícula se mueve a través de regiones donde la velocidad varía, como en una tobera o en un difusor. En flujos nominalmente “estacionarios”, el fluido puede sufrir grandes aceleraciones a consecuencia de los términos convectivos.

Obsérvese el uso que hacemos del producto escalar entre \mathbf{V} y el operador gradiente ∇ :

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{V} \cdot \nabla \quad \text{donde} \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

El concepto de la derivada total temporal —a veces llamada *derivada sustancial* o *material*— puede aplicarse a cualquier variable, como por ejemplo la presión:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)p \quad (4.3)$$

Siempre que aparecen efectos convectivos en las leyes básicas de conservación de la masa, cantidad de movimiento o energía, las ecuaciones diferenciales básicas se vuelven

no lineales, lo que origina dificultades matemáticas que las hacen más complicadas que en los flujos que no sufren cambios convectivos.

Recalamos que esta derivada temporal total sigue a una partícula con una identidad fija, lo cual es conveniente para expresar las leyes de la mecánica en la descripción euleriana. El operador d/dt se suele denominar *derivada sustancial* o material y a menudo se le asigna el símbolo especial D/Dt como recordatorio de que tiene cuatro términos y sigue a una partícula determinada.

EJEMPLO 4.1

Dado el campo vectorial de velocidades euleriano

$$\mathbf{V} = 3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}$$

determine la aceleración total de una partícula.

Solución

- *Consideraciones:* Conocemos las componentes no estacionarias de la velocidad, $u = 3t$, $v = xz$ y $w = ty^2$.
- *Procedimiento:* Calculamos todas las derivadas necesarias con respecto a (x, y, z, t) , las sustituimos en el vector de aceleración total, Ecuación (4.2), y agrupamos términos.
- *Paso 1:* Primero obtenemos la aceleración local $\partial\mathbf{V}/\partial t$:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t}(3t) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t}(xz) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t}(ty^2) = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

- *Paso 2:* De forma similar, los términos de la aceleración convectiva de la Ecuación (4.2) son:

$$u \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} = (3t) \frac{\partial}{\partial x}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (3t)(0\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 3tz\mathbf{j}$$

$$v \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} = (xz) \frac{\partial}{\partial y}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (xz)(0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2ty\mathbf{k}) = 2txyz\mathbf{k}$$

$$w \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} = (ty^2) \frac{\partial}{\partial z}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (ty^2)(0\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = txy^2\mathbf{j}$$

- *Paso 3:* Agrupando todos los términos, obtenemos la derivada “total” o “sustancial”:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} = (3\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}) + 3tz\mathbf{j} + 2txyz\mathbf{k} + txy^2\mathbf{j} \\ &= 3\mathbf{i} + (3tx + txy^2)\mathbf{j} + (y^2 + 2txyz)\mathbf{k} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

- *Comentarios:* Suponiendo que la expresión dada para \mathbf{V} es válida en todas partes, el vector aceleración total $d\mathbf{V}/dt$ es aplicable a todos los puntos e instantes del campo fluido.

4.2. La ecuación diferencial de conservación de la masa

Todas las ecuaciones diferenciales básicas pueden deducirse considerando un volumen de control elemental o un sistema elemental. Elegiremos aquí un volumen de control infinitesimal fijo (dx, dy, dz) como el de la Figura 4.1, y utilizaremos las relaciones

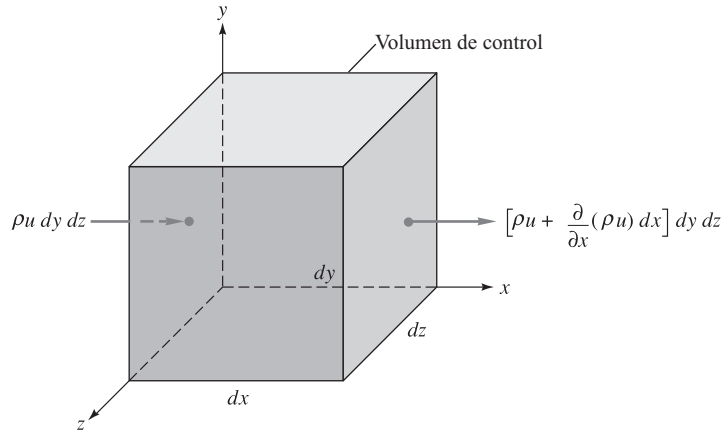


Figura 4.1. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los flujos másicos de entrada y de salida en las caras perpendiculares al eje x .

básicas para volúmenes de control del Capítulo 3. El flujo a través de cada cara del elemento es aproximadamente unidimensional y la relación de conservación de la masa apropiada es aquí

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sal} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent} = 0 \quad (3.22)$$

El elemento es tan pequeño que la integral de volumen se reduce al término diferencial:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Los términos del flujo másico aparecen en las seis caras, tres de entrada y tres de salida. Hacemos uso del concepto de continuo del Capítulo 1, donde todas las propiedades fluidas se consideran descritas por funciones que varían uniformemente con el tiempo y la posición, tal como $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Por tanto, si T es la temperatura en la cara izquierda del elemento de la Figura 4.1, la cara derecha tendrá una temperatura ligeramente diferente, $T + (\partial T/\partial x) dx$. Para la conservación de la masa, si ρu es dato en la cara izquierda, el valor de este producto en la cara derecha es $\rho u + (\partial \rho u/\partial x) dx$.

La Figura 4.1 muestra únicamente los flujos en las caras izquierda y derecha. Los flujos en las caras perpendiculares a los ejes y (inferior y superior) y z (anterior y posterior) se han omitido para más claridad en el dibujo. Haremos un listado de estos seis flujos como sigue:

Caras	Flujo másico de entrada	Flujo másico de salida
x	$\rho u dy dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz \right] dx dy$

Introduciendo estos términos en la Ecuación (3.22), tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx dy dz = 0$$

La diferencia de volumen desaparece de todos los términos, quedando una ecuación diferencial pura que relaciona las derivadas parciales de la densidad y la velocidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (4.4)$$

Este es el resultado deseado: la conservación de la masa para un volumen de control infinitesimal. A menudo se le llama *ecuación de la continuidad* porque no requiere más suposición que la de continuidad de las funciones que dan la densidad y la velocidad. Esto es, el flujo puede ser estacionario o no estacionario, viscoso o no viscoso, compresible o incompresible.¹ Sin embargo, la ecuación no admite la presencia de singularidades como fuentes o sumideros dentro del elemento.

El operador gradiente

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

nos permite reescribir la ecuación de la continuidad en una forma compacta, aunque esto no ayuda mucho a encontrar la solución. Los últimos tres términos de la Ecuación (4.4) son equivalentes a la divergencia del vector $\rho \mathbf{V}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \equiv \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (4.5)$$

de modo que la forma compacta de la ecuación de la continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4.6)$$

En esta forma vectorial la ecuación sigue siendo muy general y puede utilizarse directamente en otros sistemas de referencia distintos del cartesiano.

Coordenadas cilíndricas

La alternativa más común al sistema cartesiano es el sistema de *coordenadas cilíndricas*, esquematizado en la Figura 4.2. Un punto arbitrario P está definido por la distancia z a lo largo del eje, la distancia radial r desde el eje y el ángulo θ de rotación alrededor del eje. Las tres componentes ortogonales independientes de la velocidad son la componente axial v_z , la componente radial v_r y la componente circunferencial v_θ , que es positiva en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, esto es, en la dirección de las θ crecientes. En general, todas las componentes de la velocidad, así como la presión y la densidad y otras propiedades fluidas, son funciones continuas de r , θ , z y t .

La divergencia de cualquier función vectorial $\mathbf{A}(r, \theta, z, t)$ se obtiene aplicando la transformación de coordenadas:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad z = z \quad (4.7)$$

¹ Un caso en el que la Ecuación (4.4) podría necesitar de un cuidado especial es en el *flujo con dos fases*, donde la densidad es discontinua entre las fases. Para más detalles sobre este caso, véase, por ejemplo, la Referencia 2.

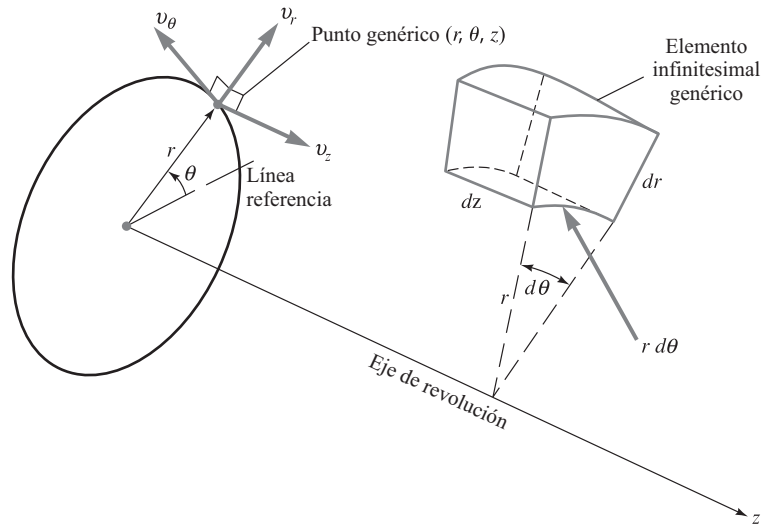


Figura 4.2. Esquema para la definición del sistema de coordenadas cilíndricas.

y el resultado lo daremos aquí sin demostración:²

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \quad (4.8)$$

La ecuación de la continuidad (4.6) en coordenadas cilíndricas es entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (4.9)$$

Hay otros sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales, especialmente las *coordenadas esféricas*, que ocasionalmente se utilizan en problemas de Mecánica de Fluidos. No utilizaremos aquí estos sistemas, excepto en el Problema P4.12.

Existen otras formas de obtener la ecuación de la continuidad (4.6) que son interesantes e instructivas. Un ejemplo es el uso del teorema de la divergencia. Pregunte a su profesor acerca de estas formas alternativas.

Flujo compresible estacionario

Si el flujo es estacionario, $\partial/\partial t \equiv 0$ y todas las propiedades son sólo funciones de la posición. La Ecuación (4.6) se reduce a

Cartesianas:
$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

Cilíndricas:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (4.10)$$

Puesto que la densidad y la velocidad son ambas variables, la ecuación es todavía no lineal y bastante complicada, pero se ha encontrado un cierto número de soluciones en casos especiales.

² Véase, por ejemplo, la Referencia 3, pág. 783.

Flujo incompresible

Un caso especial que da lugar a una gran simplificación es el flujo incompresible, donde las variaciones de densidad son despreciables. Entonces $\partial\rho/\partial t \approx 0$, independientemente de que el flujo sea estacionario o no, y la densidad puede sacarse fuera de la divergencia en la Ecuación (4.6). El resultado

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.11)$$

es válido para flujo incompresible estacionario y no estacionario. Su forma en los dos sistemas de coordenadas es

$$\text{Cartesianas:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.12a)$$

$$\text{Cilíndricas:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \quad (4.12b)$$

Estas son ecuaciones diferenciales *lineales*, y como se trata en los Capítulos 6 a 8, se conoce una gran cantidad de soluciones. Puesto que ningún autor o instructor puede resistirse a una gran variedad de soluciones, se invierte mucho tiempo estudiando los flujos incompresibles. Afortunadamente, esto es precisamente lo que debe hacerse, porque muchos flujos prácticos de la ingeniería son aproximadamente incompresibles, siendo la excepción principal los flujos de gases a altas velocidades, tratados en el Capítulo 9.

¿Cuándo puede considerarse un flujo aproximadamente incompresible? Deduiremos un criterio elegante realizando aproximaciones sencillas para estimar las variaciones de la densidad. En esencia, deseamos sacar la densidad fuera de la divergencia en la Ecuación (4.6) y aproximar un término típico, como

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \approx \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.13)$$

Esto es equivalente a la desigualdad

$$\left| u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right| \ll \left| \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right|$$

o

$$\left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right| \ll \left| \frac{\delta V}{V} \right| \quad (4.14)$$

Como vimos en la Ecuación (1.38), las variaciones de presión son aproximadamente proporcionales a las variaciones de densidad y al cuadrado de la velocidad del sonido a del fluido:

$$\delta p \approx a^2 \delta \rho \quad (4.15)$$

Por otra parte, si las variaciones de altura son despreciables, los incrementos de presión se estiman relacionándolos con los de velocidad por la ecuación de Bernoulli (3.75) para fluidos incompresibles:

$$\delta p \approx -\rho V \delta V \quad (4.16)$$

Combinando las Ecuaciones (4.14) a (4.16), obtenemos un criterio explícito para flujo incompresible:

$$\frac{V^2}{a^2} = \text{Ma}^2 \ll 1 \quad (4.17)$$

donde $\text{Ma} = V/a$ es el *número adimensional de Mach* del flujo. ¿Cómo debe ser de pequeño? El límite comúnmente aceptado es

$$\text{Ma} \leq 0.3 \quad (4.18)$$

Para aire en condiciones estándar, un flujo puede considerarse incompresible si la velocidad es menor que unos 100 m/s (330 ft/s). Esto comprende una gran variedad de flujos de aire: movimiento de automóviles y trenes, aviones ligeros, despegue y aterrizaje de aviones de gran velocidad, la mayoría de los flujos en tuberías y en turbomaquinaria a moderadas velocidades de giro. Además, está claro que la casi totalidad de los flujos de líquidos son incompresibles, puesto que las velocidades del flujo son pequeñas y la velocidad del sonido es muy grande.³

Antes de intentar analizar la ecuación de la continuidad, obtendremos las ecuaciones de la cantidad de movimiento y la energía, de modo que podamos analizarlas como un conjunto. En algunos casos se puede utilizar el concepto de *función de corriente*, con lo que se asegura que la ecuación de la continuidad se satisface automáticamente, tal como veremos en la Sección 4.7.

Conviene hacer una última observación: la ecuación de la continuidad es indispensable y debe satisfacerse siempre en todo análisis racional de la estructura de un flujo. Cualquier “solución” de las ecuaciones de la cantidad de movimiento o la energía se verá reducida a cenizas ante cualquier análisis crítico si no satisface también la ecuación de la continuidad.

EJEMPLO 4.2

¿Bajo qué condiciones representa el campo de velocidades

$$\mathbf{V} = (a_1x + b_1y + c_1z)\mathbf{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\mathbf{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\mathbf{k}$$

con a_1, b_1 , etc. = cte, un flujo incompresible en el que se conserva la masa?

Solución

Recordando que $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, vemos que $u = (a_1x + b_1y + c_1z)$, etc. Sustituyendo en la Ecuación (4.12a) para un flujo incompresible, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_1x + b_1y + c_1z) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2x + b_2y + c_2z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3x + b_3y + c_3z) = 0$$

o

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0$$

Resp.

Al menos dos de las constantes a_1, b_2 y c_3 deben tener signos opuestos. La ecuación de la continuidad no impone restricciones acerca de las constantes b_1, c_1, a_2, c_2, a_3 y b_3 , que no contribuyen al aumento o disminución del volumen de un elemento diferencial.

EJEMPLO 4.3

Un campo de velocidades incompresible está dado por

$$u = a(x^2 - y^2) \quad v \text{ desconocida} \quad w = b$$

donde a y b son constantes. ¿Cuál debe ser la forma de la componente v de la velocidad?

³ Un caso excepcional se da en los flujos geofísicos, donde los cambios de densidad están impuestos térmica o mecánicamente más que por las condiciones del flujo propiamente dichas. Un ejemplo son las capas de agua dulce entre agua salada o de aire caliente entre aire frío en la atmósfera. En estos casos decimos que el fluido está *estratificado*, y debemos tener en cuenta las variaciones verticales de densidad en la Ecuación (4.6) aunque las velocidades sean pequeñas.

Solución

Aplicando de nuevo la Ecuación (4.12a):

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - ay^2) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

$$\text{o} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2ax \quad (1)$$

que se puede integrar fácilmente con respecto a y para dar:

$$v(x, y, z, t) = -2axy + f(x, z, t) \quad \text{Resp.}$$

Esta es la única forma posible de v que satisface la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible. La función de integración f es totalmente arbitraria, puesto que desaparece cuando se deriva v con respecto a y .⁴

EJEMPLO 4.4

Un rotor centrífugo de 40 cm de diámetro se utiliza para bombear hidrógeno a 15 °C y a una presión de 1 atm. Estime la máxima velocidad angular de giro del rotor permisible para evitar efectos de compresibilidad en la punta de los álabes.

Solución

- *Consideraciones:* La máxima velocidad del fluido es aproximadamente igual a la velocidad del extremo del álabe:

$$V_{\text{máx}} \approx \Omega r_{\text{máx}} \quad \text{donde} \quad r_{\text{máx}} = D/2 = 0.20 \text{ m}$$

- *Procedimiento:* Calcularemos la velocidad del sonido del hidrógeno y nos aseguraremos de que $V_{\text{máx}}$ es mucho menor.
- *Valores de las propiedades:* De la Tabla A.4 para el hidrógeno, $R = 4124 \text{ m}^2/(\text{s}^2 - \text{K})$ y $k = 1.41$. De la Ecuación (1.39) a 15 °C = 288 K obtenemos la velocidad del sonido:

$$a_{\text{H}_2} = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.41[4124 \text{ m}^2/(\text{s}^2 - \text{K})](288 \text{ K})} \approx 1294 \text{ m/s}$$

- *Paso final:* De acuerdo con la Ecuación (4.18), la compresibilidad es despreciable si

$$V = \Omega r_{\text{máx}} \leq 0.3a \quad \text{o} \quad \Omega(0.2 \text{ m}) \leq 0.3(1294 \text{ m/s})$$

$$\text{Resolviendo} \quad \Omega \leq 1940 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 18,500 \text{ rpm} \quad \text{Resp.}$$

- *Comentarios:* Esta es una velocidad angular bastante alta, debido a que la velocidad del sonido del hidrógeno, un gas ligero, es casi cuatro veces mayor que la del aire. Un rotor moviéndose a esta velocidad en aire podría generar ondas de choque en el extremo de los álabes.

⁴ Es un flujo muy realista que simula la corriente en un rincón de 60°; véanse los Ejemplos 4.7 y 4.9.

4.3. La ecuación de la cantidad de movimiento en forma diferencial

Habiendo hecho el análisis una vez en la Sección 4.2 para la conservación de la masa, podemos hacerlo más rápido esta vez. Utilizamos el mismo volumen de control elemental de la Figura 4.1, para el cual la forma apropiada de la ecuación de la cantidad de movimiento es

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho \mathbf{V} d^3V \right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{sal}} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{ent}} \quad (3.40)$$

De nuevo el elemento es tan pequeño que la integral de volumen se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V} d^3V) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) dx dy dz \quad (4.19)$$

Aparecen flujos de cantidad de movimiento en las seis caras, tres de entrada y tres de salida. Refiriéndonos otra vez a la Figura 4.1, podemos hacer una tabla con los flujos de cantidad de movimiento de forma análoga a la utilizada para obtener el flujo másico neto:

Caras	Flujo de cantidad de movimiento de entrada	Flujo de cantidad de movimiento de salida
x	$\rho u \mathbf{V} dy dz$	$\left[\rho u \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \mathbf{V}) dx \right] dy dz$
y	$\rho v \mathbf{V} dx dz$	$\left[\rho v \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \mathbf{V}) dy \right] dx dz$
z	$\rho w \mathbf{V} dx dy$	$\left[\rho w \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \mathbf{V}) dz \right] dx dy$

Introduciendo estos términos y la Ecuación (4.19) en la Ecuación (3.40), obtenemos esta expresión:

$$\sum \mathbf{F} = dx dy dz \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \mathbf{V}) \right] \quad (4.20)$$

Obsérvese que se trata de una relación vectorial. Se puede simplificar si dividimos el término entre corchetes como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

El término entre corchetes del segundo miembro es idénticamente nulo según la ecuación de la continuidad (4.6). El término entre paréntesis del segundo miembro es, según la Ecuación (4.2), la aceleración total de la partícula que ocupa en ese instante el volumen de control:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (4.2)$$

Por tanto, hemos reducido la Ecuación (4.20) a

$$\sum \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dx dy dz \quad (4.22)$$

Sería bueno detenerse ahora y reflexionar sobre lo que acabamos de hacer. ¿Cuál es la relación entre las Ecuaciones (4.22) y (3.40) para un volumen de control infinitesimal? ¿Podríamos haber empezado el análisis con la Ecuación (4.22)?

La Ecuación (4.22) indica que la fuerza neta sobre el volumen de control debe ser infinitesimal y proporcional al volumen elemental. Estas fuerzas son de dos tipos: fuerzas *volumétricas* y fuerzas de *superficie*. Las fuerzas volumétricas se deben a campos externos (gravitatorios, magnéticos, eléctricos) que actúan sobre toda la masa del volumen elemental. Las únicas fuerzas volumétricas que consideraremos en este libro son las gravitatorias. La fuerza de gravedad sobre una masa diferencial $\rho \, dx \, dy \, dz$ dentro del volumen de control es

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho \mathbf{g} \, dx \, dy \, dz \tag{4.23}$$

donde en general \mathbf{g} puede tener una orientación arbitraria con respecto al sistema de coordenadas. En muchas aplicaciones, en especial en la ecuación de Bernoulli, tomaremos z “hacia arriba”, y $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$.

Las fuerzas de superficie se deben a los esfuerzos en las caras de la superficie de control. Estos esfuerzos, como se discutió en el Capítulo 2, son suma de la presión hidrostática y de los esfuerzos viscosos que aparecen en el movimiento con gradientes de velocidad:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

La notación de los subíndices para los esfuerzos se da en la Figura 4.3. A diferencia de la velocidad \mathbf{V} , que es un *vector* de tres componentes, los esfuerzos σ_{ij} y τ_{ij} y las velocidades de deformación \mathcal{D}_{ij} son *tensores* de nueve componentes y requieren de dos subíndices para definir cada componente. En las Referencias 6, 11 o 13 se puede profundizar en el *análisis tensorial*.

No son estos esfuerzos, sino sus *gradientes* o diferencias, los que causan una fuerza neta sobre la superficie total del volumen de control infinitesimal. Esto se ve en la Figura 4.4, donde sólo se muestra, para más claridad en el dibujo, el esfuerzo en la dirección del

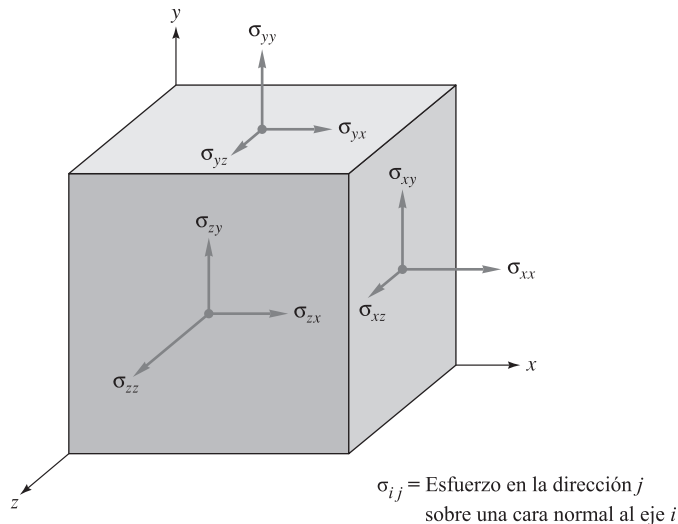


Figura 4.3. Notación para los esfuerzos.

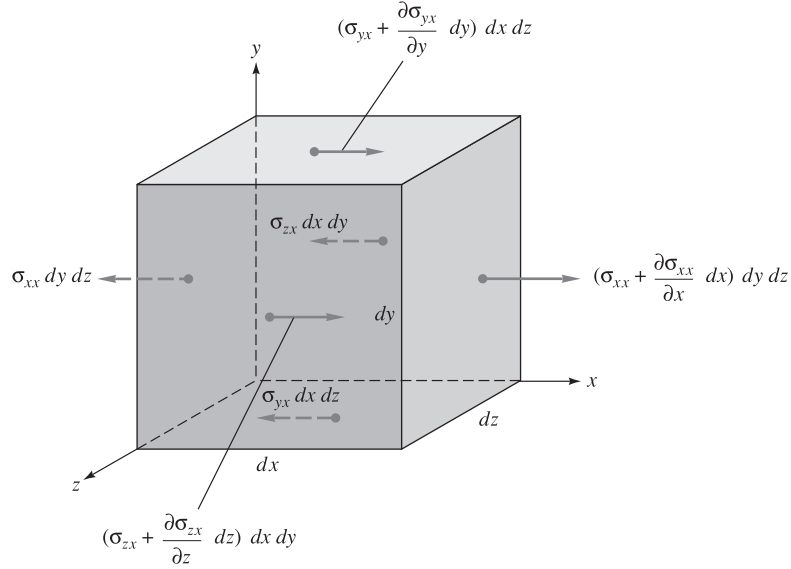


Figura 4.4. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando sólo la componente x de las fuerzas de superficie.

eje x . Por ejemplo, la fuerza hacia la izquierda $\sigma_{xx} dy dz$ en la cara izquierda queda equilibrada parcialmente por la fuerza hacia la derecha $\sigma_{xx} dy dz$ en la cara derecha, quedando sólo la fuerza neta hacia la derecha $(\partial \sigma_{xx} / \partial x) dx dy dz$ en la cara derecha. Lo mismo sucede en las otras cuatro caras, de modo que la fuerza neta de superficie en la dirección x está dada por

$$dF_{x,\text{sup}} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}) \right] dx dy dz \quad (4.25)$$

Se ve que esta fuerza es proporcional al volumen elemental. Obsérvese que los esfuerzos se han tomado de la *fila superior* de la matriz de la Ecuación (4.24). Dividiendo esta fila en presión y esfuerzos viscosos, podemos reescribir la Ecuación (4.25) como

$$\frac{dF_x}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}) \quad (4.26)$$

donde $dV = dx dy dz$. Del mismo modo podemos obtener las fuerzas por unidad de volumen sobre las superficies del volumen de control en las direcciones y y z :

$$\begin{aligned} \frac{dF_y}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}) \\ \frac{dF_z}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ahora podemos multiplicar las Ecuaciones (4.26) y (4.27) por \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , respectivamente, y sumarlas para obtener una expresión vectorial para la fuerza neta de superficie:

$$\left(\frac{d\mathbf{F}}{dV} \right)_{\text{sup}} = -\nabla p + \left(\frac{d\mathbf{F}}{dV} \right)_{\text{viscosa}} \quad (4.28)$$

donde la fuerza viscosa tiene un total de nueve términos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{\text{viscosa}} &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ &+ \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ &+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como cada uno de los términos entre paréntesis que aparecen en (4.29) representa la divergencia de un vector cuyas componentes son los esfuerzos que actúan sobre las caras x , y y z , respectivamente, la Ecuación (4.29) se puede escribir en forma de divergencia:

$$\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{\text{viscosa}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} \quad (4.30)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

es el tensor de esfuerzos viscosos que actúa sobre el elemento. Por tanto, la fuerza neta de superficie es la suma del vector *gradiente de presión* y de la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos. Sustituyendo en la Ecuación (4.22) y utilizando la Ecuación (4.23), tenemos la ecuación de la cantidad de movimiento en forma diferencial:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (4.32)$$

donde

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (4.33)$$

También podemos expresar la Ecuación (4.32) en palabras:

$$\text{Fuerza gravitatoria por unidad de volumen} + \text{fuerza de presión por unidad de volumen} + \text{fuerza viscosa por unidad de volumen} = \text{densidad} \times \text{aceleración} \quad (4.34)$$

La Ecuación (4.32) es tan breve y compacta que su implícita complejidad es casi invisible. Es una ecuación vectorial, cada una de cuyas componentes tiene nueve términos. Escribamos las tres componentes en forma explícita para ilustrar las dificultades matemáticas inherentes a la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Esta es la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento en toda su extensión. Es válida para cualquier fluido con cualquier movimiento, estando caracterizado cada fluido por unos términos de esfuerzos viscosos particulares. Obsérvese que los tres últimos términos “convectivos” del segundo miembro de las ecuaciones (4.35) son no lineales, lo que complica el análisis matemático.

Flujo no viscoso: ecuación de Euler

La Ecuación (4.35) no estará lista para su uso mientras no escribamos los esfuerzos viscosos en función de las componentes de la velocidad. La hipótesis más sencilla es la de flujo no viscoso, $\tau_{ij} = 0$, para el cual la Ecuación (4.32) se reduce a

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (4.36)$$

Esta es la *ecuación de Euler* para flujos no viscosos. En la Sección 4.9 se muestra que la ecuación de Euler puede integrarse a lo largo de las líneas de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli (3.75) o (3.77). En el Capítulo 8 se da el análisis completo de los flujos no viscosos, utilizando la ecuación de la continuidad y la de Bernoulli.

Fluido newtoniano: ecuaciones de Navier-Stokes

Para un fluido newtoniano, los esfuerzos viscosos son, como se discutió en la Sección 1.9, proporcionales a la velocidad de deformación y al coeficiente de viscosidad. Para flujos incompresibles, la generalización de la Ecuación (1.23) al caso tridimensional es⁵

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad. La sustitución en la Ecuación (4.35) proporciona la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento para un fluido newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{du}{dt} \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{dv}{dt} \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{dw}{dt} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Estas son las *ecuaciones de Navier-Stokes* para flujos incompresibles, llamadas así en honor a C. L. M. H. Navier (1785-1836) y sir George G. Stokes (1819-1903), que fueron los primeros en deducirlas. Son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden, y resultan bastante impresionantes. Sorprendentemente, se han encontrado soluciones a una gran variedad de flujos viscosos de interés, algunas de las cuales

⁵ Cuando la compresibilidad es importante, aparecen términos adicionales proporcionales a la velocidad de dilatación cúbica unitaria y a un *segundo* coeficiente de viscosidad; para más detalles, véanse las Referencias 4 y 5.

se discuten en la Sección 4.11 y en el Capítulo 6 (véanse también las Referencias 4 y 5). Para flujos compresibles, véase la Ecuación (2.29) de la Referencia 5.

Las Ecuaciones (4.38) tienen cuatro incógnitas: p , u , v y w . Deben combinarse con la ecuación de la continuidad para flujos incompresibles [Ecuaciones (4.12)] para tener la cuarta ecuación para las cuatro incógnitas. Discutiremos esto de nuevo en la Sección 4.6, donde se presentan las condiciones de contorno apropiadas para estas ecuaciones.

Aunque sólo se conoce un número limitado de soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes, estas ecuaciones se pueden discretizar en mallas finas para simular el comportamiento de los fluidos usando un ordenador [1]. El campo de la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) está madurando rápidamente, y existen numerosas herramientas de software comerciales. Hoy en día es posible obtener resultados CFD aproximados, pero realistas, de una gran variedad de flujos viscosos bidimensionales y tridimensionales complejos.

EJEMPLO 4.5

Tome el campo de velocidades del Ejemplo 4.3, con $b = 0$ por conveniencia:

$$u = a(x^2 - y^2) \quad v = -2axy \quad w = 0$$

y determine bajo qué condiciones es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38). Suponga que se dan dichas condiciones y determine la distribución de presiones resultante cuando z se mide “hacia arriba” ($g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = -g$).

Solución

- *Consideraciones:* Densidad y viscosidad constantes, flujo estacionario (u y v independientes del tiempo).
- *Procedimiento:* Sustituimos las componentes conocidas (u , v , w) en las Ecuaciones (4.38) y despejamos los gradientes de presiones. Si se puede encontrar una distribución de presiones $p(x, y, z)$ única, la solución es exacta.
- *Paso 1:* Sustituimos (u , v , w) en las Ecuaciones (4.38):

$$\rho(0) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(2a - 2a + 0) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2a^2 \rho (x^3 + xy^2)$$

$$\rho(0) - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(0 + 0 + 0) = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2a^2 \rho (x^2y + y^3)$$

$$\rho(-g) - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu(0 + 0 + 0) = \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Reordenando y despejando los tres gradientes de presiones:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2a^2 \rho (x^3 + xy^2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -2a^2 \rho (x^2y + y^3) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (1)$$

- *Comentario 1:* El gradiente de presiones vertical es *hidrostático*. [¿Se podría haber predicho esto teniendo en cuenta que $w = 0$ en las Ecuaciones (4.38)?] No obstante, la presión en el plano xy depende de la velocidad.
- *Paso 2:* Para comprobar si los gradientes de presiones en las direcciones x e y de la Ecuación (1) son compatibles entre sí, calculamos la derivada cruzada ($\partial^2 p / \partial x \partial y$); esto es, derivamos cada una de las ecuaciones con respecto a la otra coordenada:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} [-2a^2 \rho (x^3 + xy^2)] = -4a^2 \rho xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [-2a^2 \rho (x^2y + y^3)] = -4a^2 \rho xy$$

- *Comentario 2:* Al ser iguales las derivadas cruzadas, el campo de velocidades dado es efectivamente una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- *Paso 3:* Para determinar la presión, integramos las Ecuaciones (1), agrupamos y comparamos. Empezamos con $\partial p/\partial x$. ¡Debemos proceder con cuidado! Integramos *parcialmente* con respecto a x , manteniendo y y z constantes:

$$p = \int \frac{\partial p}{\partial x} dx|_{y,z} = \int -2a^2\rho(x^3 + xy^2) dx|_{y,z} = -2a^2\rho\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}\right) + f_1(y, z) \quad (2)$$

Obsérvese que la “constante” de integración f_1 es una *función* de las variables que no fueron integradas. Ahora derivamos la Ecuación (2) con respecto a y y comparamos con la expresión para $\partial p/\partial y$ obtenida de la Ecuación (1):

$$\frac{\partial p}{\partial y}|_{(2)} = -2a^2\rho x^2y + \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}|_{(1)} = -2a^2\rho(x^2y + y^3)$$

Comparando: $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2a^2\rho y^3$ o $f_1 = \int \frac{\partial f_1}{\partial y} dy|_z = -2a^2\rho \frac{y^4}{4} + f_2$

Agrupando términos: $p = -2a^2\rho\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right) + f_2(z)$ (3)

Esta vez la “constante” de integración f_2 es una función únicamente de z (la variable no integrada). Ahora derivamos la Ecuación (3) con respecto a z y comparamos con la expresión para $\partial p/\partial z$ obtenida de la Ecuación (1):

$$\frac{\partial p}{\partial z}|_{(3)} = \frac{df_2}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z}|_{(1)} = -\rho g \quad \text{o} \quad f_2 = -\rho g z + C \quad (4)$$

donde C es una constante. Esto completa nuestras tres integraciones. Combinando las Ecuaciones (3) y (4) se obtiene la expresión completa para la distribución de presiones:

$$p(x, y, z) = -\rho g z - \frac{1}{2}a^2\rho(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + C \quad \text{Resp. (5)}$$

Esta es la solución buscada. ¿La reconoce? No, a menos que volvamos al principio y calculemos el cuadrado de la velocidad:

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2 = a^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) \quad (6)$$

Comparando con la Ecuación (5), la distribución de presiones puede reescribirse como

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C \quad (7)$$

- *Comentario:* Esta es la ecuación de Bernoulli (3.77). Esto no es accidental, porque la distribución de velocidades dada en este problema pertenece a una familia de flujos que son solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y que satisfacen la ecuación de Bernoulli en todo el campo fluido incompresible. Son los llamados flujos *irrotacionales*, para los cuales $\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} \equiv 0$. Este tema se trata de nuevo en la Sección 4.9.

4.4. La ecuación diferencial del momento cinético

Iremos rápidamente en la deducción de la ecuación diferencial del momento cinético, ya que se utilizan las mismas ideas que para las ecuaciones de la continuidad y la cantidad de movimiento. La ecuación del momento cinético en forma integral para un volumen de control fijo es

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{VC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d^3V \right] + \int_{SC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (3.55)$$

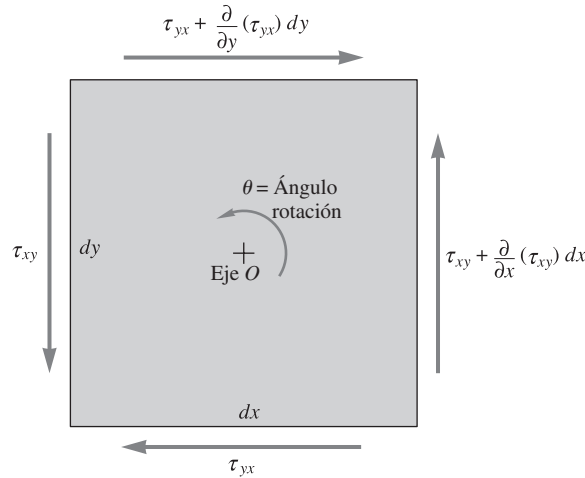


Figura 4.5. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los esfuerzos de cortadura que pueden producir una aceleración angular alrededor del eje O .

Nos referiremos a un eje O que es paralelo al eje z y que pasa por el centro de masas del volumen de control infinitesimal, como se muestra en la Figura 4.5. Sea θ el ángulo de giro alrededor de O del fluido contenido en el volumen de control. Los únicos esfuerzos que dan momento alrededor de O son los esfuerzos de cortadura τ_{xy} y τ_{yx} . Podemos evaluar los momentos y los términos del momento cinético alrededor de O . La obtención necesita numerosas transformaciones algebraicas; sólo daremos aquí el resultado final:

$$\left[\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) dx - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) dy \right] dx dy dz = \frac{1}{12} \rho(dx dy dz)(dx^2 + dy^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.39)$$

Considerando que la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ no es infinita, podemos despreciar todos los términos diferenciales de orden superior, lo que nos proporciona el interesante resultado:

$$\tau_{xy} \approx \tau_{yx} \quad (4.40)$$

De haber sumado los momentos alrededor de ejes paralelos a y o x , hubiéramos obtenido resultados totalmente análogos:

$$\tau_{xz} \approx \tau_{zx} \quad \tau_{yz} \approx \tau_{zy} \quad (4.41)$$

No existe ecuación diferencial del momento cinético. La aplicación de la ecuación integral a un volumen de control infinitesimal proporciona el resultado, bien conocido por los estudiantes de resistencia de materiales, de que los esfuerzos de cortadura son simétricos: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Este es el único resultado de esta sección.⁶ No hay ninguna ecuación que recordar, lo que deja espacio en su cerebro para la próxima, la ecuación diferencial de la energía.

⁶ Estamos despreciando la posibilidad de un *par* finito aplicado al elemento debido a un campo exterior de fuerzas muy intenso. Véase, por ejemplo, la Referencia 6, pág. 217.

4.5. La ecuación diferencial de la energía⁷

Estamos ya tan acostumbrados a este tipo de ecuaciones que podemos obtener la ecuación de la energía de forma muy rápida. La forma integral apropiada para el volumen de control fijo de la Figura 4.1 es

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (3.63)$$

donde $\dot{W}_s = 0$, ya que no hay trabajo motor sobre el volumen de control por no haber partes móviles dentro de un volumen infinitesimal fijo. Por analogía con la Ecuación (4.20), y por el tamaño tan pequeño del elemento, el segundo miembro toma la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \zeta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \zeta) \right] dx dy dz \quad (4.42)$$

donde $\zeta = e + p/\rho$. Cuando utilizamos la ecuación de la continuidad de forma análoga a la Ecuación (4.21), la Ecuación (4.22) se reduce a

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \left(\rho \frac{de}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dx dy dz \quad (4.43)$$

Para evaluar \dot{Q} , despreciamos la radiación y consideramos sólo la conducción de calor a través de las caras del elemento. Como se vio en el Capítulo 1, el flujo de calor por conducción sigue la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (1.29a)$$

donde λ es el coeficiente de conductividad térmica del fluido. La Figura 4.6 muestra el flujo de calor que atraviesa las caras perpendiculares al eje x . Los flujos de calor a través de las caras perpendiculares a los ejes y y z se han omitido para más claridad en el dibujo. Los seis flujos de calor son:

Caras	Flujo de calor de entrada	Flujo de calor de salida
x	$q_x dy dz$	$\left[q_x + \frac{\partial}{\partial x} (q_x) dx \right] dy dz$
y	$q_y dx dz$	$\left[q_y + \frac{\partial}{\partial y} (q_y) dy \right] dx dz$
z	$q_z dx dy$	$\left[q_z + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) dz \right] dx dy$

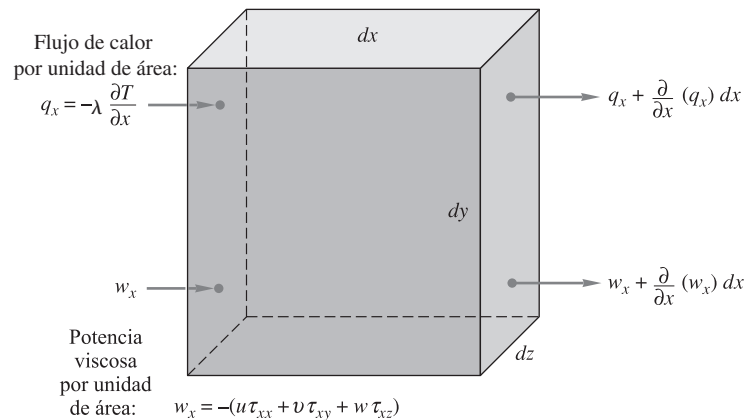


Figura 4.6. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los términos del flujo de calor y el trabajo de los esfuerzos viscosos por unidad de tiempo en la dirección del eje x .

⁷Esta sección puede ser omitida sin pérdida de continuidad.

Sumando los términos de entrada y restando los términos de salida obtenemos el flujo neto de calor añadido al elemento:

$$\dot{Q} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z) \right] dx dy dz = -\nabla \cdot \mathbf{q} dx dy dz \quad (4.44)$$

Como era de esperar, el flujo de calor es proporcional al volumen elemental. Introduciendo la ley de Fourier dada por la Ecuación (1.29), tenemos

$$\dot{Q} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dx dy dz \quad (4.45)$$

El trabajo por unidad de tiempo debido a los esfuerzos viscosos es igual al producto de la componente del esfuerzo por la componente de la velocidad correspondiente y por el área de la cara del elemento. La Figura 4.6 muestra que el trabajo por unidad de tiempo en la cara izquierda, perpendicular al eje x , es

$$\dot{W}_{i,CI} = w_x dy dz \quad \text{donde} \quad w_x = -(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) \quad (4.46)$$

(donde el subíndice CI significa cara izquierda), mientras que se obtiene un trabajo ligeramente diferente en la cara derecha debido al gradiente de w_x . Estos flujos de energía se pueden tabular del mismo modo que los flujos de calor en la tabla anterior, sustituyendo q_x por w_x , etc. Después de restar los términos de salida de los de entrada, la potencia debida a la viscosidad viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{W}_v &= - \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz}) \right] dx dy dz \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) dx dy dz \end{aligned} \quad (4.47)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.45) y (4.47) en la Ecuación (4.43) obtenemos una forma de la ecuación diferencial de la energía:

$$\rho \frac{de}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij})$$

donde
$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}V^2 + gz \quad (4.48)$$

Se obtiene una forma más útil separando el término viscoso como suma de dos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \equiv \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi \quad (4.49)$$

donde Φ es la *función de disipación viscosa*.⁸ Para un fluido viscoso newtoniano e incompresible, esta función toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Puesto que todos los términos son cuadráticos, la disipación viscosa es siempre positiva, de modo que un flujo viscoso siempre tiende a perder su energía disponible a causa de la disipación, de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica.

⁸Para más detalles, véase, por ejemplo, la Referencia 5, pág. 72.

Sustituyendo ahora la Ecuación (4.49) en la Ecuación (4.48) y utilizando la ecuación de la cantidad de movimiento (4.32) para eliminar $\nabla \cdot \tau_{ij}$, se obtiene una forma más utilizada de la ecuación diferencial de la energía, en la que no aparece la energía cinética ni la potencial:

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi \quad (4.51)$$

Esta ecuación es válida para un fluido newtoniano bajo unas condiciones muy generales de flujo no estacionario, compresible, viscoso y conductor del calor; sólo se desprecian la transferencia de calor por radiación y las *fuentes* internas de calor que podrían aparecer en una reacción química o nuclear.

La Ecuación (4.51), que debe resolverse junto con las ecuaciones de la continuidad, cantidad de movimiento y estado, hace el problema difícil de analizar, excepto si se usa un ordenador [1]. Es habitual hacer las siguientes aproximaciones:

$$d\hat{u} \approx c_v dT \quad c_v, \mu, \lambda, \rho \approx \text{cte} \quad (4.52)$$

La Ecuación (4.51) toma en este caso la forma más simple, para $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$,

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \Phi \quad (4.53)$$

que involucra a la temperatura T como variable primaria y a la velocidad como variable secundaria a través de la derivada sustancial:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.54)$$

Se conocen muchas soluciones interesantes de la Ecuación (4.53) para varios tipos de flujos, dándose extensos tratamientos en textos avanzados sobre flujos viscosos [4, 5] y en libros de transferencia de calor [7, 8].

Un caso especial bien conocido de la Ecuación (4.53) es cuando el fluido está en reposo o tiene una velocidad lo suficientemente pequeña para poder despreciar la disipación viscosa Φ y los términos convectivos:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad (4.55)$$

El cambio de c_v por c_p es correcto y está justificado por el hecho de que cuando se desprecian los términos de presión en la ecuación de la energía para el flujo de un gas [4, 5], lo que queda es aproximadamente una variación de entalpía y no una variación de energía interna. Esta es la llamada *ecuación de la conducción del calor* en matemática aplicada y es válida para sólidos y fluidos en reposo. Las soluciones de la Ecuación (4.55) para distintas condiciones cubren una gran parte de los cursos y libros de transferencia de calor.

Esto completa la obtención de las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de los fluidos.

4.6. Condiciones de contorno para las ecuaciones básicas

Acabamos de obtener las tres ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de los fluidos. Resumamos aquí estas ecuaciones:

Continuidad:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4.56)$$

Cantidad de movimiento:
$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (4.57)$$

Energía:
$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \Phi \quad (4.58)$$

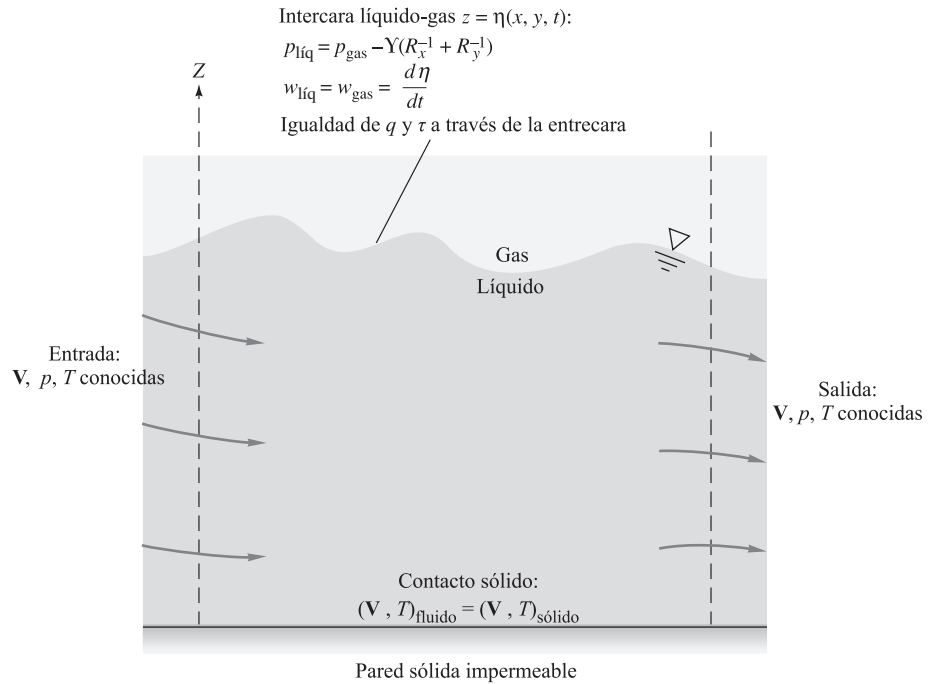


Figura 4.7. Condiciones de contorno típicas para el análisis del flujo de un fluido viscoso y conductor del calor.

donde Φ está dada por la Ecuación (4.50). En general, la densidad es variable, de modo que estas tres ecuaciones contienen cinco incógnitas: ρ, V, p, \hat{u} y T . Por tanto, necesitamos dos relaciones adicionales para completar el sistema de ecuaciones. Estas son las ecuaciones de estado que relacionan las propiedades termodinámicas, dadas en forma algebraica o mediante gráficos:

$$\rho = \rho(p, T) \quad \hat{u} = \hat{u}(p, T) \tag{4.59}$$

Por ejemplo, para un gas perfecto con calores específicos constantes, completamos el sistema con

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \hat{u} = \int c_v dT \approx c_v T + \text{cte} \tag{4.60}$$

Se demuestra en libros avanzados [4, 5] que el sistema que forman las Ecuaciones (4.56) a (4.59) está bien planteado y se puede resolver analítica o numéricamente con las condiciones de contorno apropiadas a cada caso.

¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas? Primero, si el flujo es no estacionario, debe haber *condiciones iniciales*, esto es, distribuciones espaciales conocidas para cada variable en el instante inicial:

En $t = 0$: $\rho, V, p, \hat{u}, T = f(x, y, z)$ conocidas* (4.61)

Después, para todo instante t , debemos saber algo acerca de las variables en cada *contorno* que encierra al flujo.

La Figura 4.7 muestra los tres tipos de contornos más comunes que se encuentran en el análisis de flujos: una pared sólida, una entrada o salida y una interfase líquido-gas.

En primer lugar, en una pared sólida impermeable no hay deslizamiento ni salto de temperaturas cuando el fluido es viscoso y conductor del calor:

*Para $t = 0$ sólo se necesita dar la distribución espacial de dos variables termodinámicas; la distribución espacial del resto se obtiene de las ecuaciones de estado ($N. del T.$).

$$\text{Pared sólida:} \quad \mathbf{V}_{\text{fluido}} = \mathbf{V}_{\text{pared}} \quad T_{\text{fluido}} = T_{\text{pared}} \quad (4.62)$$

La única excepción a la Ecuación (4.62) ocurre en el flujo de gases muy rarificados, en cuyo caso puede haber deslizamiento [5].

En segundo lugar, en las secciones de entrada o salida se deben conocer las distribuciones de velocidad, presión y temperatura en todo instante:

$$\text{Entrada o salida:} \quad \mathbf{V}, p, T \text{ conocidas} \quad (4.63)$$

Estas secciones de entrada o salida a menudo están situadas en $\pm \infty$, simulando un cuerpo sumergido en un fluido que se extiende hasta el infinito.

Finalmente, las condiciones más complejas se dan en la superficie de separación entre un líquido y un gas, o superficie libre, como la esquematizada en la Figura 4.7. Sea la superficie de separación dada por

$$\text{Superficie de separación:} \quad z = z(x, y, t) \quad (4.64)$$

Debe haber igualdad de velocidades verticales a través de la superficie de separación, de modo que no aparezcan huecos entre el líquido y el gas:

$$w_{\text{líqu}} = w_{\text{gas}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4.65)$$

Esta es la llamada *condición de contorno cinemática*.*

También debe haber equilibrio mecánico en la interfase. Los esfuerzos viscosos tangenciales a la superficie deben ser iguales:

$$(\tau_{zy})_{\text{líqu}} = (\tau_{zy})_{\text{gas}} \quad (\tau_{zx})_{\text{líqu}} = (\tau_{zx})_{\text{gas}} \quad (4.66)$$

Despreciando los esfuerzos viscosos normales, las presiones deben equilibrarse en la superficie, excepto por los efectos de la tensión superficial:

$$p_{\text{líqu}} = p_{\text{gas}} - \gamma(R_x^{-1} + R_y^{-1}) \quad (4.67)$$

que es equivalente a la Ecuación (1.34). Los radios de curvatura pueden escribirse en términos de la posición η de la superficie libre:

$$R_x^{-1} + R_y^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \eta / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial \eta / \partial x)^2 + (\partial \eta / \partial y)^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \eta / \partial y}{\sqrt{1 + (\partial \eta / \partial x)^2 + (\partial \eta / \partial y)^2}} \right] \quad (4.68)$$

Finalmente, el flujo de calor normal a la superficie debe ser el mismo a ambos lados, dado que no se puede almacenar calor en una superficie de espesor infinitesimal:

$$(q_z)_{\text{líqu}} = (q_z)_{\text{gas}} \quad (4.69)$$

Despreciando la radiación, esto es equivalente a

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{líqu}} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{gas}} \quad (4.70)$$

Este es todo el detalle que deseamos dar para el nivel de exposición de este libro. En las Referencias 5 y 9 se dan detalles más amplios y complicados sobre las condiciones de contorno apropiadas para los movimientos de los fluidos.

* También debe haber continuidad de temperaturas (*N. del T.*).

Condiciones simplificadas en la superficie libre

En los análisis introductorios dados en este libro, como el del flujo en canales abiertos del Capítulo 10, deberíamos utilizar las condiciones exactas (4.65) a (4.69), pero en lugar de eso consideraremos que el fluido sobre la superficie libre es simplemente la “atmósfera” que solamente ejerce presión sobre el fluido situado debajo, con rozamiento y conducción de calor despreciables. También despreciaremos los términos no lineales que involucran las pendientes de la superficie libre. En ese caso las condiciones en la superficie libre adoptan la siguiente forma linealizada, mucho más simple:

$$p_{\text{líqu}} \approx p_{\text{gas}} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad w_{\text{líqu}} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{\text{líqu}} \approx 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{líqu}} \approx 0 \quad (4.71)$$

En muchos casos, como en el flujo en canales abiertos, también es posible despreciar los efectos de tensión superficial, de modo que, en la superficie libre:

$$p_{\text{líqu}} \approx p_{\text{atm}} \quad (4.72)$$

Estos son los tipos de aproximaciones que usaremos en el Capítulo 10. En el Capítulo 5 se utilizarán las formas adimensionales de estas condiciones.

Flujo incompresible con propiedades constantes

En el Capítulo 6 se simplificará el análisis de los flujos haciendo la hipótesis de que ρ , μ y λ son constantes. En este caso, las ecuaciones básicas del movimiento (4.56) a (4.58) se reducen a

$$\text{Continuidad:} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.73)$$

$$\text{Cantidad de movimiento:} \quad \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.74)$$

$$\text{Energía:} \quad \rho c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \Phi \quad (4.75)$$

Dado que ρ es constante, sólo hay tres incógnitas: p , \mathbf{V} y T . El sistema está cerrado.⁹ No sólo eso, el sistema se divide en dos, puesto que las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento son independientes de T . Por tanto, podemos resolver separadamente las Ecuaciones (4.73) y (4.74) para la presión y la velocidad, utilizando condiciones de contorno tales como

$$\text{Superficie sólida:} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{pared}} \quad (4.76)$$

$$\text{Entrada o salida:} \quad \mathbf{V}, p \text{ conocidas} \quad (4.77)$$

$$\text{Superficie libre:} \quad p \approx p_a \quad w \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.78)$$

Posteriormente, si se quiere,¹⁰ podemos obtener la distribución de temperaturas de la Ecuación (4.75), que depende de la velocidad \mathbf{V} a través de la disipación Φ y de la derivada sustancial d/dt .

⁹Para este sistema, ¿cuáles son los equivalentes termodinámicos a la Ecuación (4.59)?

¹⁰Dado que la temperatura está *desacoplada*, no la vamos a resolver aquí; esto se hará en el curso de transporte de calor.

Aproximaciones para flujos no viscosos

En el Capítulo 8 se consideran los flujos no viscosos, para los cuales la viscosidad $\mu = 0$. La ecuación de la cantidad de movimiento (4.74) se reduce a

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (4.79)$$

Esta es la ecuación de Euler, que puede integrarse a lo largo de una línea de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli (véase Sección 4.9). Al desprejir la viscosidad, hemos perdido los términos de derivadas de segundo orden de \mathbf{V} en la Ecuación (4.74); por tanto, debemos relajar una condición de contorno de la velocidad. La única condición que matemáticamente se puede quitar es la de no deslizamiento en la pared. Permitiremos que el fluido deslice paralelo a la pared, pero no que penetre en la pared impermeable. La condición apropiada para flujo no viscoso es que las velocidades normales sean iguales a las de las paredes sólidas:

$$\text{Flujos no viscosos:} \quad (V_n)_{\text{fluido}} = (V_n)_{\text{pared}} \quad (4.80)$$

En la mayoría de los casos la pared es fija; por tanto, la condición apropiada es

$$V_n = 0 \quad (4.81)$$

No hay condición alguna para la componente tangencial a la pared en los flujos no viscosos. La velocidad tangencial se obtendrá como parte de la solución del análisis del flujo no viscoso (véase Capítulo 8).

EJEMPLO 4.6

Para el flujo laminar, incompresible y estacionario en un tubo largo, la distribución de velocidades viene dada por

$$v_z = U \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad v_r = v_\theta = 0$$

donde U es la velocidad máxima en la línea central y R es el radio del tubo. Si la temperatura en la pared es constante e igual a T_p y la temperatura depende sólo de la distancia r a la línea central, $T = T(r)$, encuentre $T(r)$ para esta configuración.

Solución

Como $T = T(r)$, la Ecuación (4.75) se reduce para flujo estacionario a

$$\rho c_p v_r \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 \quad (1)$$

Pero como en este flujo $v_r = 0$, el término convectivo del primer miembro desaparece. Introduciendo v_z en la Ecuación (1), se obtiene

$$\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 = -\frac{4U^2 \mu r^2}{R^4} \quad (2)$$

Multiplicando por r/k e integrando una vez:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\mu U^2 r^4}{\lambda R^4} + C_1 \quad (3)$$

Dividiendo por r e integrando otra vez:

$$T = -\frac{\mu U^2 r^4}{4\lambda R^4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4)$$

Impondremos ahora las condiciones de contorno para determinar C_1 y C_2 .

En primer lugar, como el logaritmo de cero es $-\infty$, la temperatura sería infinita en $r = 0$, a menos que

$$C_1 = 0 \quad (5)$$

Eliminamos así la posibilidad de una singularidad logarítmica. Lo mismo habría ocurrido si imponemos la condición de *simetría* $dT/dr = 0$ en $r = 0$ a la Ecuación (3). La constante C_2 se obtiene de la condición de que la temperatura en $r = R$ es igual a la de la pared:

$$T = T_p = -\frac{\mu U^2}{4\lambda} + C_2$$

$$\text{o} \quad C_2 = T_p + \frac{\mu U^2}{4\lambda} \quad (6)$$

La solución correcta es entonces

$$T(r) = T_p + \frac{\mu U^2}{4\lambda} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) \quad \text{Resp. (7)}$$

que es una distribución parabólica de cuarto orden con un valor máximo de $T_0 = T_p + \mu U^2/(4\lambda)$ en la línea central.

4.7. La función de corriente

Hemos visto en la Sección 4.6 que cuando la temperatura está desacoplada del sistema de ecuaciones del movimiento, se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento para obtener la presión y la velocidad. La *función de corriente* ψ es una idea muy ingeniosa que nos permite eliminar la ecuación de la continuidad y resolver la ecuación de la cantidad de movimiento directamente para una única variable ψ .

La idea de la función de corriente sólo es aplicable si la ecuación de la continuidad (4.56) se puede reducir a *dos* sumandos. En general tenemos *cuatro* sumandos:

$$\text{Cartesianas:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (4.82a)$$

$$\text{Cilíndricas:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (4.82b)$$

Eliminamos primero el flujo no estacionario, que es una aplicación peculiar y poco realista de la función de corriente. Reduzcamos cualquiera de las Ecuaciones (4.82) a la suma de *dos* sumandos. La aplicación más común es el flujo bidimensional incompresible, por ejemplo, en el plano xy :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.83)$$

Esta ecuación se satisface *idénticamente* si se define una función $\psi(x, y)$, de tal modo que la Ecuación (4.83) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \equiv 0 \quad (4.84)$$

Comparando (4.83) con (4.84), la nueva función ψ debe definirse de tal modo que

$$\boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}} \quad (4.85)$$

o

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

¿Es esto legítimo? Sí, no es más que un truco matemático para reemplazar dos variables (u y v) por una única función ψ de orden superior. La vorticidad,¹¹ o rot \mathbf{V} , es una función interesante:

$$\text{rot } \mathbf{V} = -\mathbf{k}\nabla^2\psi \quad \text{donde} \quad \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (4.86)$$

Si tomamos el rotor de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.74) y utilizamos la Ecuación (4.86), obtenemos una única ecuación para ψ en flujo incompresible:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2\psi) = \nu\nabla^2(\nabla^2\psi) \quad (4.87)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Esta ecuación tiene ventajas e inconvenientes: ventajas porque la Ecuación (4.87) es escalar y sólo hay una variable, ψ , pero como contrapartida contiene derivadas de *cuarto* orden, y probablemente requiera una solución numérica. Se necesitan cuatro condiciones de contorno para ψ . Por ejemplo, si el flujo es una corriente uniforme en la dirección del eje x que incide sobre un cuerpo sólido, las cuatro condiciones de contorno serían:

En el infinito:
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U_\infty \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (4.88)$$

En el cuerpo:
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

En la Referencia 1 se dan muchos ejemplos de soluciones numéricas de las Ecuaciones (4.87) y (4.88).

Una aplicación importante es la del flujo no viscoso, *irrotacional* e incompresible¹² en el plano xy , donde $\text{rot } \mathbf{V} \equiv 0$. Las Ecuaciones (4.86) y (4.87) se reducen a

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.89)$$

Esta es la *ecuación de Laplace* (Capítulo 8), de segundo orden, para la que se conocen muchas soluciones y técnicas analíticas para obtenerlas. A su vez, las condiciones de contorno tales como las dadas en (4.88) se reducen a:

En el infinito:
$$\psi = U_\infty y + \text{cte} \quad (4.90)$$

En el cuerpo:
$$\psi = \text{cte}$$

¹¹Véase la Sección 4.8.

¹²Véase la Sección 4.8.

Está dentro de nuestras posibilidades el encontrar soluciones simples a las Ecuaciones (4.89) y (4.90), como las que daremos en el Capítulo 8.

Interpretación geométrica de ψ

La idea matemática anterior podría servir por sí misma para hacer la función de corriente ψ inmortal y muy útil para los ingenieros. Por si fuera poco, ψ tiene una bella interpretación geométrica: las líneas ψ constante son *líneas de corriente* del flujo. Esto puede demostrarse como sigue. La definición de las líneas de corriente en un flujo bidimensional, dada por la Ecuación (1.41), es

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\text{o} \quad u \, dy - v \, dx = 0 \quad \text{línea de corriente} \quad (4.91)$$

Introduciendo la función de corriente de la Ecuación (4.85), tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 = d\psi \quad (4.92)$$

Por tanto, la variación de ψ a lo largo de las líneas de corriente es cero, o

$$\psi = \text{constante a lo largo de las líneas de corriente} \quad (4.93)$$

Dada una solución $\psi(x, y)$, podemos representar las líneas ψ constante para obtener las líneas de corriente del flujo.

Hay también una interpretación física que relaciona ψ con el flujo volumétrico. De la Figura 4.8 podemos determinar el flujo volumétrico dQ a través de un elemento de superficie de control ds de profundidad unidad:

$$\begin{aligned} dQ &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \left(\mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{dy}{ds} - \mathbf{j} \frac{dx}{ds} \right) ds(1) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi \end{aligned} \quad (4.94)$$

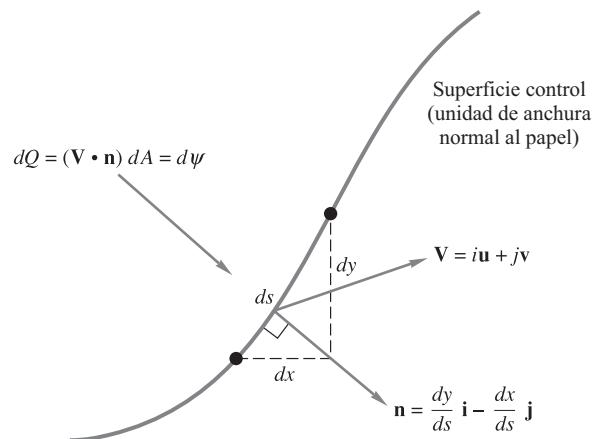
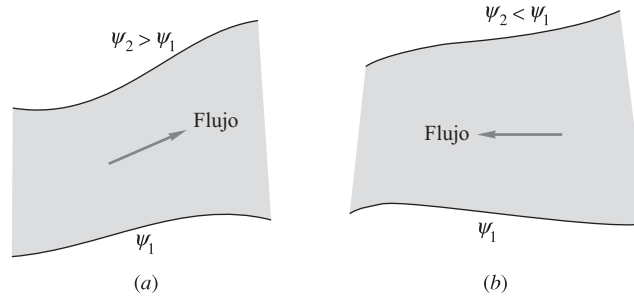


Figura 4.8. Interpretación geométrica de la función de corriente: flujo volumétrico a través de un elemento infinitesimal de superficie de control.

Figura 4.9. Convenio de signos para la dirección del flujo de acuerdo con la variación de la función de corriente:
 (a) flujo hacia la derecha si ψ_2 es más grande;
 (b) flujo hacia la izquierda si ψ_1 es más grande.



Por tanto, la variación de ψ a través del elemento es numéricamente igual al flujo volumétrico a través del elemento. El flujo volumétrico entre dos líneas de corriente cualesquiera del flujo es igual a la diferencia de valores de la función de corriente entre dichas líneas de corriente:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (4.95)$$

Por otra parte, se puede determinar la dirección del flujo observando si ψ crece o decrece. Como muestra la Figura 4.9, el flujo es hacia la derecha si ψ_2 es mayor que ψ_1 ; en caso contrario, el flujo es hacia la izquierda.

Tanto la función de corriente como el potencial de velocidades los inventó el matemático francés Joseph Louis Lagrange, y los publicó en su tratado sobre Mecánica de Fluidos en 1781.

EJEMPLO 4.7

¿Existe una función de corriente para el campo de velocidades del Ejemplo 4.5?

$$u = a(x^2 - y^2) \quad v = -2axy \quad w = 0$$

Si es así, determínala, dibújela e interprétela.

Solución

- *Consideraciones:* Flujo incompresible y bidimensional.
- *Procedimiento:* Utilizaremos la definición de las derivadas de la función de corriente, Ecuaciones (4.85), para determinar $\psi(x, y)$.
- *Paso 1:* En el Ejemplo 4.3 se mostró que este campo de velocidades satisface la ecuación de la continuidad (4.83), luego estamos razonablemente seguros de que existe función de corriente, pero volvamos a comprobarlo; en caso contrario no existiría ψ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[a(x^2 - y^2)] + \frac{\partial}{\partial y}(-2ay) = 2ax + (-2ax) \equiv 0 \quad \text{se cumple}$$

Por tanto, existe la función de corriente.

- Paso 2: Para determinar ψ , escribimos las Ecuaciones (4.85) e integramos:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2 \quad (1)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \quad (2)$$

y podemos empezar a operar con cualquiera de ellas. Integrando parcialmente (1):

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + f(x) \quad (3)$$

Derivando (3) con respecto de x y comparándola con (2):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy + f'(x) = 2axy \quad (4)$$

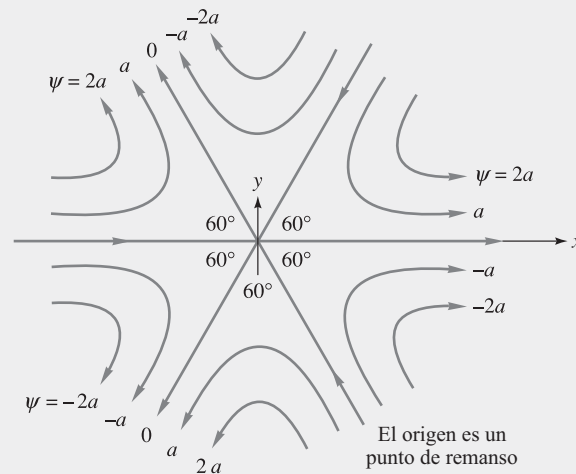
Así pues, $f'(x) = 0$, o $f = \text{constante}$. La función de corriente es, por tanto:

$$\psi = a\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) + C \quad \text{Resp. (5)}$$

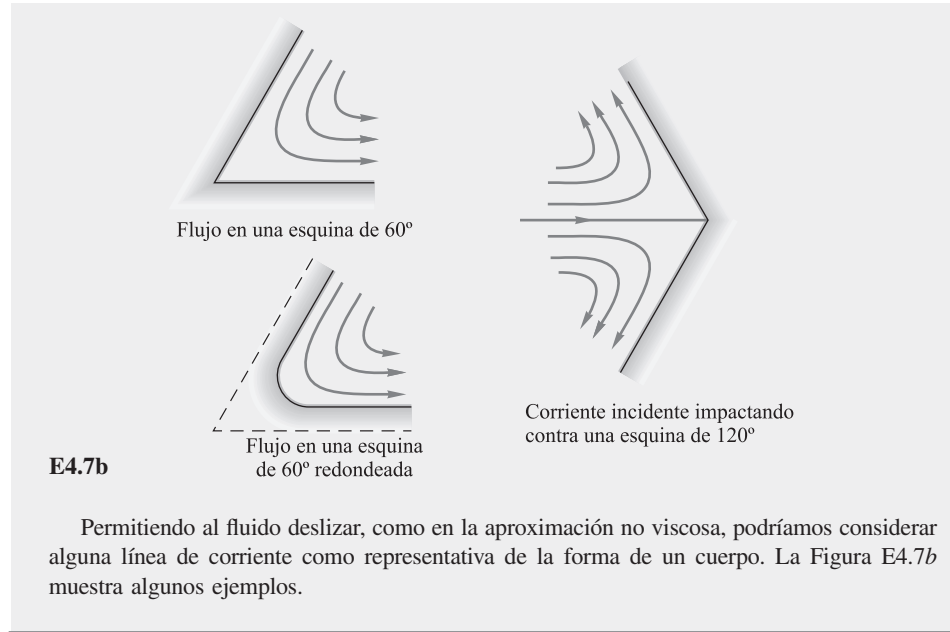
Para representarla elegimos $C = 0$ por conveniencia y representamos la función

$$3x^2y - y^3 = \frac{3\psi}{a} \quad (6)$$

para valores constantes de ψ . El resultado, que se muestra en la Figura E4.7a, representa un movimiento circulatorio en seis cuñas de 60° , en cuyo interior el movimiento es idéntico salvo por el sentido que indican las flechas. Una vez que se tienen las líneas de corriente, la dirección del flujo se obtiene directamente del convenio de signos de la Figura 4.9. ¿Cómo puede interpretarse el flujo? Puesto que hay deslizamiento a lo largo de todas las líneas de corriente, ninguna de ellas puede representar una superficie en un flujo viscoso. Sin embargo, el flujo podría representar la deflexión de tres corrientes incidiendo a 60° , 180° y 300° . Como vimos en el Ejemplo 4.5, esta es una solución exacta, aunque todavía poco realista, de las ecuaciones de Navier-Stokes.



E4.7a



Existe también función de corriente en una variedad de situaciones físicas donde sólo se necesitan dos coordenadas para describir el flujo. Se ilustran aquí tres ejemplos.

Flujo plano, compresible y estacionario

Suponga ahora que la densidad es variable, pero que $w = 0$, de modo que el flujo tiene lugar en el plano xy . En este caso, la ecuación de la continuidad es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (4.96)$$

Vemos que es exactamente de la misma forma que la Ecuación (4.84). Por tanto, la función de corriente de un flujo compresible puede definirse de tal modo que

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.97)$$

De nuevo, las líneas ψ constante son líneas de corriente, pero ahora la diferencia de valores de ψ es igual al flujo *másico* y no al volumétrico:

$$d\dot{m} = \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = d\psi$$

o

$$\dot{m}_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \psi_2 - \psi_1 \quad (4.98)$$

El convenio de signos para la dirección del flujo es el mismo que en la Figura 4.9. Esta función de corriente combina la densidad con la velocidad y debe sustituirse no sólo en la ecuación de la cantidad de movimiento, sino también en la de la energía y en las de estado (4.58) y (4.59) con la presión y la temperatura como variables adicionales. En estas condiciones, la función de corriente no es tan útil como en el caso de densidad constante, y suelen ser necesarias algunas simplificaciones adicionales para obtener soluciones analíticas de problemas típicos (véase, por ejemplo, Referencia 5, Capítulo 7).

Flujo incompresible plano en coordenadas polares

Supongamos que las coordenadas importantes son r y θ , con $v_z = 0$, y que la densidad es constante. Entonces la Ecuación (4.82b) se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) = 0 \quad (4.99)$$

Después de multiplicar todo por r , toma una forma análoga a la de la Ecuación (4.84):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.100)$$

Comparando (4.99) con (4.100) se deduce la forma de la función de corriente incompresible en coordenadas polares:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.101)$$

De nuevo, las líneas ψ constante son líneas de corriente, y la diferencia de dos valores de ψ es el *flujo volumétrico*, $Q_{1 \rightarrow 2} = \psi_2 - \psi_1$. El convenio de signos es el mismo que en la Figura 4.9. Este tipo de función de corriente es muy útil a la hora de analizar flujos alrededor de cilindros, con torbellinos, fuentes y sumideros (Capítulo 8).

Flujo incompresible axilsimétrico

Como ejemplo final, supongamos que el flujo es tridimensional (v_r, v_z) pero sin variaciones circunferenciales, $v_\theta = \partial/\partial\theta = 0$ (para la definición de las coordenadas, véase Figura 4.2). Un flujo de este tipo se denomina *axilsimétrico*, y la estructura del flujo es la misma en cualquier plano meridional que contiene al eje de revolución z . Para un flujo incompresible, la Ecuación (4.82b) toma la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \quad (4.102)$$

Aquí hay algo que no funciona: ¿cómo podríamos deshacernos de la r que aparece dividiendo en el primer miembro? Dado que r y z son coordenadas independientes, la Ecuación (4.102) puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \quad (4.103)$$

Por analogía con (4.84), esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.104)$$

Comparando (4.103) con (4.104), deducimos la forma de la función de corriente $\psi(r, z)$ para el movimiento axilsimétrico de un fluido incompresible:

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.105)$$

Las líneas ψ constante son, de nuevo, líneas de corriente, pero hay un factor (2π) en el flujo volumétrico: $Q_{1 \rightarrow 2} = 2\pi(\psi_2 - \psi_1)$. El convenio de signos para el flujo es el mismo que en la Figura 4.9.

EJEMPLO 4.8

Investigue la función de corriente en coordenadas polares:

$$\psi = U \operatorname{sen} \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \tag{1}$$

donde U y R son una velocidad y una longitud constantes, respectivamente. Represente las líneas de corriente. ¿Qué representa el flujo? ¿Se trata de una solución realista de las ecuaciones básicas?

Solución

Las líneas de corriente son líneas de ψ constante, cuyas dimensiones son metro cuadrado por segundo. Obsérvese que $\psi/(UR)$ es adimensional. Reescribimos la Ecuación (1) en forma adimensional:

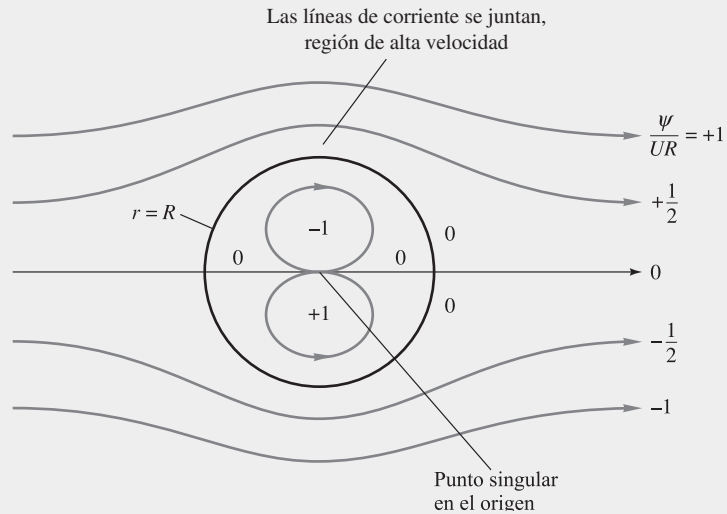
$$\frac{\psi}{UR} = \operatorname{sen} \theta \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \quad \eta = \frac{r}{R} \tag{2}$$

La línea $\psi = 0$ es de particular interés. De la Ecuación (1) o (2) se obtiene que esto ocurre cuando (a) $\theta = 0$ o 180° y (b) $r = R$. El caso (a) es el eje x y el caso (b) es un círculo de radio R , ambos representados en la Figura E4.8.

Para cualquier valor de ψ distinto de cero, es fácil despejar θ en función de r :

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\psi/(UR)}{r/R - R/r} \tag{3}$$

En general, habrá dos soluciones para θ a causa de la simetría alrededor del eje y . Por ejemplo, tomando $\psi/(UR) = +1.0$:



E4.8

r/R supuesto	3.0	2.5	2.0	1.8	1.7	1.618
θ calculado	22° 158°	28° 152°	42° 138°	53° 127°	64° 116°	90°

Esta línea, representada en la Figura E4.8, es exterior al círculo $r = R$. Obsérvese que hay una segunda curva para $\psi/(UR) = +1.0$ con valores de $r < R$ que está situada por debajo del eje x :

r/R supuesto	0.618	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
θ calculado	-90°	-70° -110°	-42° -138°	-28° -152°	-19° -161°	-12° -168°	-6° -174°

Esta segunda curva está representada como una curva cerrada en el interior del círculo $r = R$. Hay una singularidad en el origen, donde la velocidad es infinita y la dirección de la corriente está indeterminada. En la Figura E4.8 se muestra el esquema completo de las líneas de corriente.

La función de corriente de la Ecuación (1) corresponde a una solución exacta, ya clásica, de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.38) para un flujo no viscoso. Fuera del círculo $r = R$ representa el flujo no viscoso bidimensional de una corriente uniforme alrededor de un cilindro circular (Sección 8.4). En el interior del círculo representa un movimiento circulatorio, bastante poco realista, denominado *doblete*.

4.8. Vorticidad e irrotacionalidad

La suposición de velocidad angular nula del fluido, o irrotacionalidad, conduce a simplificaciones muy útiles. Vamos a mostrar aquí que la velocidad angular está asociada al rotor de la velocidad local de un fluido.

Las relaciones diferenciales para la deformación de un elemento fluido pueden obtenerse analizando la Figura 4.10. Dos líneas fluidas AB y BC , perpendiculares entre sí en el instante t , se mueven y se deforman de modo que en el instante $t + dt$ tienen longitudes

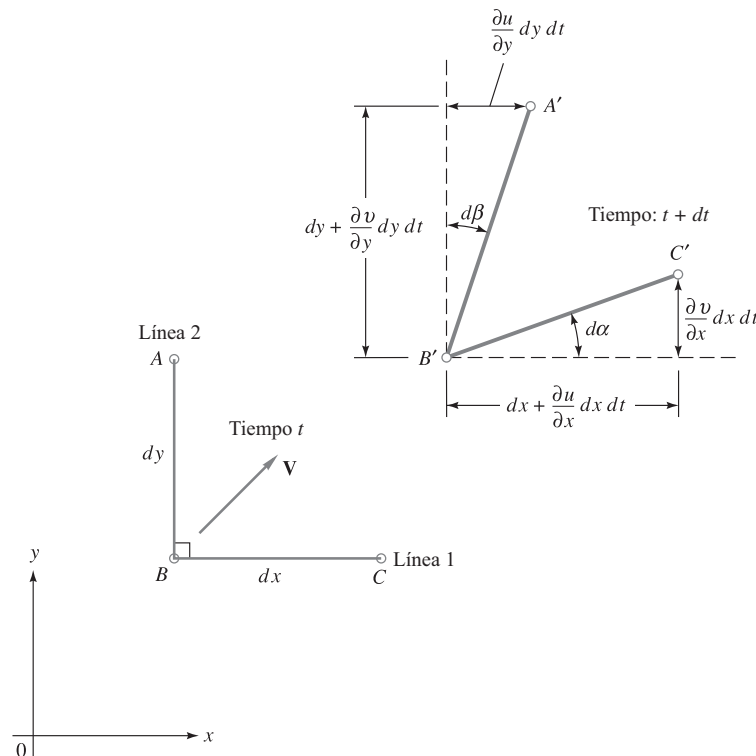


Figura 4.10. Velocidad angular y velocidad de deformación de dos líneas fluidas que se deforman en el plano xy .