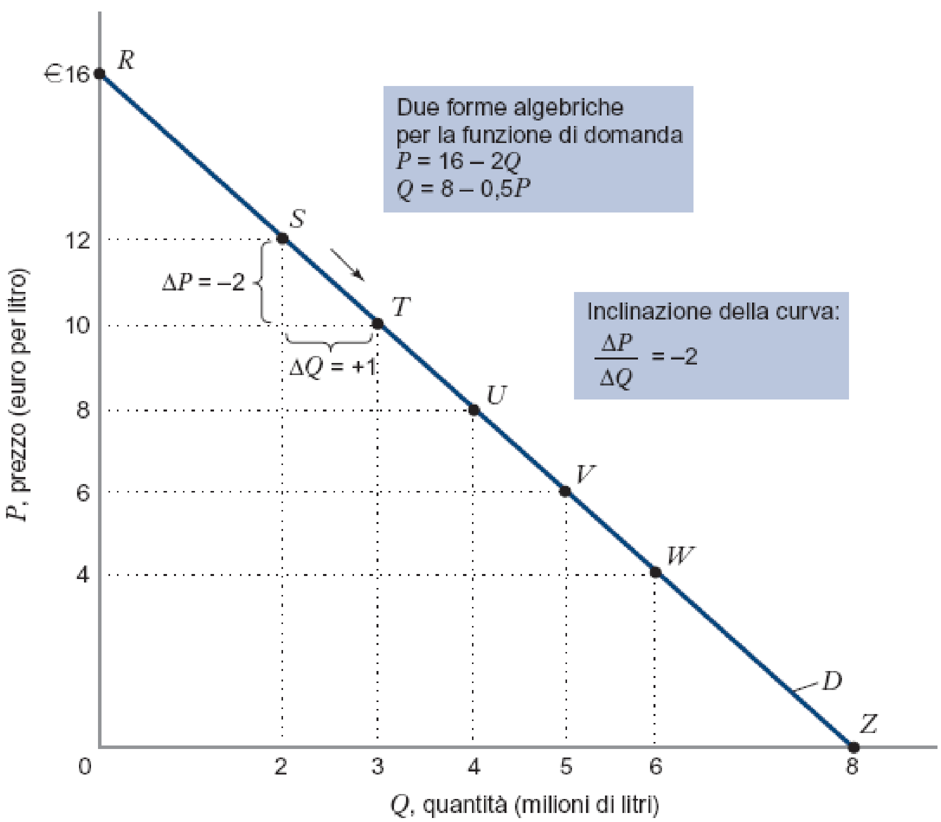
APPENDICE MATEMATICA

Questa Appendice fornisce una descrizione di alcuni dei concetti matematici che risultano più utili per affrontare lo studio della microeconomia. Oltre ad introdurre e presentare tali concetti, cercheremo di illustrarli in concreto attraverso alcuni esempi.

A.1 RELAZIONI FUNZIONALI

L'analisi economica richiede spesso di capire in che modo le variabili economiche si relazionino tra di loro. Vi sono fondamentalmente tre modi per descrivere le relazioni fra variabili: attraverso dei grafici, attraverso delle tabelle oppure attraverso delle funzioni algebriche. La Figura A.1, per esempio, contiene informazioni relative alla domanda di vernici in un certo mercato.



Punti del grafico	Prezzo della vernice (€ per litro)	Milioni di litri venduti in un anno
S	12	2
T	10	3
U	8	4
V	6	5
W	4	6

FIGURA A.1 Relazioni funzionali: un esempio basato sulla curva di domanda
Il grafico e la tabella mostrano la relazione fra la quantità di vernici acquistata sul mercato (Q) ed il prezzo della vernice stessa (P). La prima riga della tabella mostra che, per esempio, quando il prezzo è di € 12 al litro, la quantità di vernici acquistata complessivamente nell'anno ammonta a 2 milioni di litri. Questa combinazione prezzo-quantità corrisponde al punto S della figura. La relazione funzionale fra prezzi e quantità può essere espressa in termini algebrici in due modi diversi. Se scriviamo il prezzo in funzione della quantità, l'equazione della curva di domanda è $P = 16 - 2Q$. In alternativa, se scegliamo di esprimere le quantità in funzione dei prezzi, la relazione può essere scritta come $Q = 8 - 0{,}5P$.

La tabella riportata sotto la figura indica la quantità di vernici richiesta dai consumatori in corrispondenza dei possibili livelli di prezzo: ad esempio, se il prezzo fosse di € 10 per ogni litro di vernice, la quantità scambiata sul mercato risulterebbe pari, complessivamente, a 8 milioni di litri l'anno.

Queste informazioni sono mostrate anche all'interno del grafico, in corrispondenza del punto T. Per convenzione, gli economisti rappresentano le curve di domanda in grafici nei quali i prezzi vengono riportati sull'asse verticale e le quantità su quello orizzontale. Dato che le quantità scambiate vanno lette sull'asse delle ascisse (e sono misurate in milioni di litri), il punto T avrà per coordinate (3,10). Sappiamo inoltre che, quando il prezzo è pari a € 8 al litro, i consumatori domandano in tutto 4 milioni di litri; nel grafico, questo corrisponde al punto U, che ha coordinate (4,8). Le altre combinazioni mostrate nella tabella corrispondono invece ai punti S, V, e W della figura. Come si evince da questo esempio, grafici e tabelle possono essere molto utili per descrivere la relazione che esiste fra le variabili economiche.

Spesso però risulta altrettanto utile ricorrere a delle equazioni per esprimere tali relazioni. Utilizzando la notazione funzionale, per esempio, è possibile esprimere la relazione che intercorre fra prezzo e quantità:

$$Q = f(P) \qquad \text{(A.1)}$$

Tale funzione ci dice come Q, ovvero la quantità di vernici consumata (espressa in milioni di litri) dipenda dal prezzo P (espresso in € per litro). La forma funzionale specifica che descrive i dati della Figura A.1 è la seguente:

$$\boldsymbol{Q = 8 - 0{,}5\,P} \qquad \text{(A.2)}$$

L'Equazione (A.2) rappresenta quindi la funzione di domanda che contiene tutti i punti mostrati nella Figura A.1. Abbiamo scritto le equazioni (A.1) e (A.2) ponendo Q a primo membro e P a secondo membro: questo è il modo naturale di scrivere la funzione di domanda nel caso in cui il quesito che ci si pone è "in che modo il numero delle unità vendute dipende dal prezzo?"

La variabile che si trova a sinistra dell'uguale (in questo caso Q) è definita *variabile dipendente*, mentre quella posta a destra dell'uguale (in questo caso P) prende il nome di *variabile indipendente*. Utilizziamo ora l'Equazione (A.2) per trovare la quantità consumata di vernici quando il prezzo delle stesse è di € 8 al litro. Se $P = 8$, allora $Q = 8 - 0{,}5(8) = 4$, per cui la quantità complessivamente acquistata dai consumatori ammonterà a 4 milioni di litri. Per sottolineare che Q è funzione di P, l'Equazione (A.2) può essere riscritta come: $Q(P) = 8 - 0{,}5P$.

Possiamo quindi usare la funzione di domanda per individuare, per esempio, il particolare livello di prezzo che indurrà i consumatori a domandare una specifica quantità. L'esercizio è utile per i produttori, che possono essere interessati a scoprire il prezzo al quale possono collocare sul mercato il quantitativo che è loro intenzione produrre e vendere. Facciamo allora assumere a P il ruolo di variabile dipendente e a Q quello di variabile indipendente. Per capire come P dipenda da Q, dobbiamo "invertire" l'Equazione (A.2), risolvendo per P in funzione di Q. Facendo in questo modo, troviamo quella che viene comunemente definita come "funzione di domanda inversa", rappresentata, in questo caso, dall'Equazione (A.3):

$$P = 16 - 2Q \qquad \text{(A.3)}$$

Tutte le combinazioni prezzo-quantità della tabella riportata nella Figura A.1 soddisfano questa equazione. Utilizziamo ora l'Equazione (A.3) per scoprire quale prezzo indurrà i consumatori a domandare esattamente 4 milioni di litri di vernice l'anno. Sostituendo $Q = 4$ all'interno di tale equazione, troviamo che $P = 16 - 2(4) = 8$: la domanda complessiva ammonterà a 4 milioni di litri l'anno quando il prezzo praticato risulterà pari a € 8 al litro. Per sottolineare che, questa volta, è P ad essere funzione di Q, è possibile riscrivere l'Equazione (A.3) come $P(Q) = 16 - 2Q$.

Se rappresentiamo la curva di domanda riportando P sull'asse verticale e Q su quello orizzontale, l'inclinazione della curva è data dalla variazione del prezzo (rappresentata dalla distanza verticale) divisa per la variazione osservata nella quantità (data dalla distanza orizzontale) che è possibile osservare muovendosi lungo la curva stessa. A titolo di esempio, supponiamo di muoverci dal punto S al punto T; la variazione del prezzo è $\Delta P = -2$ mentre la variazione della quantità è data da $\Delta Q = +1$. Per quanto detto in precedenza, l'inclinazione è quindi pari a $\Delta P/\Delta Q = -2$. Dal momento che la curva di domanda riferita a questo esempio è, in realtà, una retta, la sua inclinazione risulta costante, qualsiasi sia il punto della curva che consideriamo. L'intercetta con l'asse verticale coincide con il punto R, in corrispondenza del quale il prezzo è di € 16 per litro; nessun litro di vernice verrà quindi acquistato per questo livello di prezzo, così come per qualsiasi livello di prezzo superiore.[1] Se il prezzo delle vernici fosse zero, i consumatori domanderebbero complessivamente 8 milioni di litri. Questa è quindi l'intercetta orizzontale della curva, rappresentata dal punto Z del grafico.

---

1 Richiamando le nozioni di base di algebra, l'equazione di una retta è $y = mx + b$, dove i valori di y sono riportati sull'asse verticale e quelli di x sull'asse orizzontale. In un grafico di questo tipo, m rappresenta l'inclinazione della retta e b l'intercetta verticale. Nella Figura A.1 la variabile y è, in

Per imparare bene come disegnare le curve di domanda e offerta a partire da un'equazione data, può essere utile andare a rivedere gli Esercizi "Learning-By-Doing" 2.1 e 2.2.

Rappresentazione grafica del costo totale.

Questo esempio può risultare utile per comprende come si possa rappresentare graficamente (o in forma di tabella) la funzione del costo totale. Tale funzione descrive, in termini algebrici, la relazione che intercorre fra il costo totale di produzione (C) e la quantità prodotta (Q):

$$C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q \qquad \text{(A.4)}$$

Problema: indica, all'interno di una tabella, il costo totale di produzione relativo ai seguenti livelli di *output*: $Q = 0$, $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 3$, $Q = 4$, $Q = 5$, $Q = 6$, $Q = 7$. Rappresenta graficamente la funzione del costo totale, riportando lungo l'asse verticale i costi totali e riportando invece lungo l'asse orizzontale le quantità.

Soluzione: le prime due colonne della Tabella A.1 mostrano il costo totale relativo a ciascun livello di produzione. Ad esempio, nel caso si producano tre unità di *output*, valutiamo la funzione $C(Q)$ in corrispondenza di $Q = 3$: troviamo quindi $C(3) = (3)^3 - 10(3)^2 + 40(3) = 57$. (Per quanto concerne le altre colonne della tabella, torneremo ad esaminarle più avanti.) Il costo totale di produzione è rappresentato nel riquadro (a) della Figura A.2. [Il riquadro (b) ci servirà invece più avanti.]

A.2 COSA SIGNIFICA "MARGINALE"?

Nel momento in cui sono chiamati ad effettuare delle scelte, gli individui sono spesso interessati al **valore marginale** della variabile dipendente. Tale valore misura la variazione osservabile nella variabile dipendente a fonte di una variazione unitaria nel valore della variabile indipendente.

Il costo marginale, per esempio, rappresenta la variazione del costo totale dovuta ad un incremento unitario della produzione ed è quindi dato da $\Delta C / \Delta Q$. Chi deve stabilire il livello di produzione in un'impresa è interessato a conoscere il costo marginale per sapere di quanto aumenta il costo se si decide di produrre un'unità in più di *output*. Torniamo alla Tabella A.1, in cui è mostrato il costo totale sulla base dell'Equazione (A.4). La variabile dipendente è il costo totale, mentre quella indipendente è la quantità prodotta. La tabella mostra due modi diversi per misurare il costo marginale.

Nella colonna numero tre, il costo marginale viene calcolato mostrando come varia il costo totale nel momento in cui si realizza un'unità addizionale di prodotto. Tale colonna è intitolata "Costo marginale approssimato" poiché misura la variazione dei costi in riferimento ad un intervallo per cui le quantità possono aumentare solo unità per unità. Tanto per fare un esempio, supponiamo che la quantità aumenti da $Q = 2$ a $Q = 3$; il costo totale aumenta allora da $C(2) = 48$ a $C(3) = 57$. Di conseguenza, il costo marginale in questa porzione della curva dei costi totali è dato da $C(3) - C(2) = 9$. In modo analogo, possiamo calcolare il costo marginale nel caso si passi da $Q = 5$ a $Q = 6$: troviamo che $C(6) - C(5) = 21$.

---

realtà, il prezzo P (riportato infatti sull'asse delle ordinate) mentre la variabile x è Q (misurata infatti lungo l'asse delle ascisse). Quindi, anziché avere l'equazione $y = -2x + 16$, nell'esempio considerato abbiamo $P = -2Q + 16$. L'inclinazione della retta è allora pari a -2 e l'intercetta verticale è 16.

TABELLA A.1 Relazione fra costo totale, costo medio e costo marginale*

(1) Quantity Produced (units) Q	(2) Total Cost (\$) C	(3) "Arc" Marginal Cost (\$/unit) $C(Q) \cdot C(Q \cdot 1)$	(4) "Point" Marginal Cost (\$/unit) dC/dQ	(5) Average Cost (\$/unit) C/Q
0	0		40	
		$C(1) \cdot C(0) = 31$		
1	31		23	31
		$C(2) \cdot C(1) = 17$		
2	48		12	24
		$C(3) \cdot C(2) = 9$		
3	57		7	19
		$C(4) \cdot C(3) = 7$		
4	64		8	16
		$C(5) \cdot C(4) = 11$		
5	75		15	15
		$C(6) \cdot C(5) = 21$		
6	96		28	16
		$C(7) \cdot C(6) = 37$		
7	133		47	19

*La tabella mostra i valori delle curve dei costi totali, medi e marginali assumendo che la funzione di costo sia $C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$.

Disponendo di questi dati, è possibile rappresentare graficamente il costo marginale. Consideriamo la Figura A.2(a). L'asse verticale riporta i costi totali, mentre quello orizzontale misura le quantità prodotte. Possiamo dimostrare che il costo marginale calcolato nella terza colonna della tabella precedente costituisce un'approssimazione dell'inclinazione della curva del costo totale, in riferimento all'intervallo di valori considerato. Determiniamo, per esempio, il costo marginale d produzione che si deve sostenere aumentando la produzione da $Q = 5$ (siamo nel punto *A*) a $Q = 6$ (siamo nel punto *B*). Tracciamo quindi un segmento che congiunga i punti *A* e *B;* l'inclinazione di tale segmento rappresenta la variazione dei costi (l'incremento - più precisamente - che in questo caso è pari a 21) rapportata alla variazione della quantità (unitaria). L'inclinazione del segmento *AB* risulta, pertanto, coincidere con la misura del costo marginale riportata nella terza colonna della tabella. È bene notare che, nell'intervallo considerato lungo l'asse orizzontale (fra 5 e 6), l'inclinazione della curva dei costi varia: il costo marginale che abbiamo calcolato sulla base di variazioni unitarie rappresenta quindi solo un'approssimazione della reale inclinazione della curva nell'intervallo in esame.

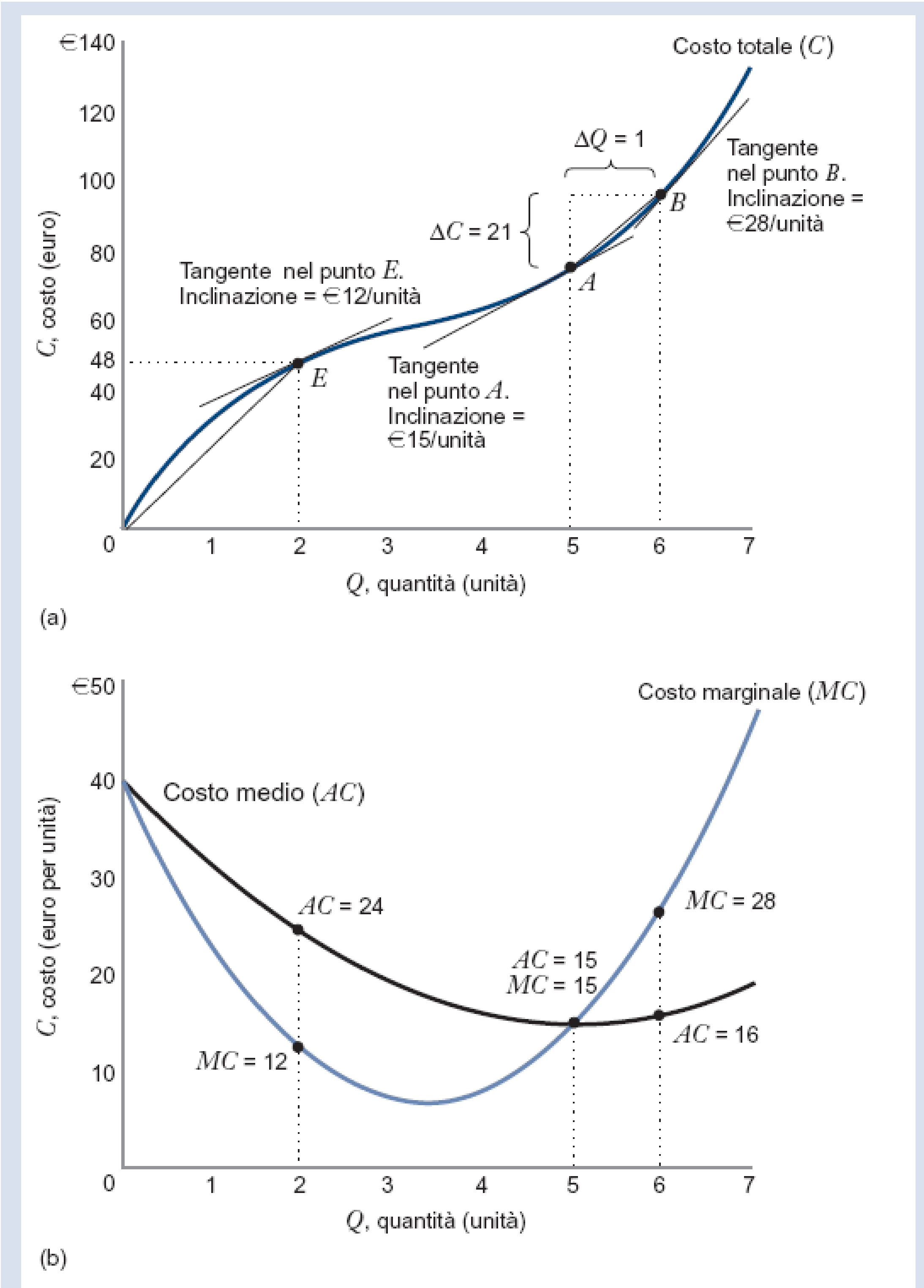


FIGURA A.2 Relazione grafica fra costi totali, costi medi e costi marginali
Il riquadro (a) mostra il costo totale di produzione per ogni possibile livello di *output*. Le unità riportate lungo l'asse verticale di questo grafico sono unità monetarie, più precisamente euro. Il riquadro (b) mostra invece la curva del costo medio corrispondente alla curva del costo totale rappresentata nel riquadro superiore. In questo secondo grafico, lungo l'asse verticale l'unità di misura sono gli euro per unità di prodotto. Il riquadro (b) mostra inoltre il *valore del costo marginale* per ogni livello di produzione, che corrisponde all'inclinazione della curva del costo totale del riquadro (a).

Anziché procedere per approssimazioni, possiamo calcolare esattamente il costo marginale in ogni specifico punto (vale a dire, in corrispondenza di una particolare quantità). Consideriamo, per esempio, il punto *A*. In corrispondenza di tale punto, l'inclinazione della curva del costo totale coincide con l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto stesso. L'inclinazione della retta tangente misura il saggio al quale varia il costo totale nel punto *A*: di conseguenza, *l'inclinazione della retta tangente alla curva del costo totale nel punto A rappresenta il costo marginale di produzione quando la quantità prodotta è al livello corrispondente ad A*.

In modo analogo, l'inclinazione della tangente alla curva del costo totale nel punto *B* rappresenta il costo marginale di produzione quando la quantità prodotta è quella corrispondente a *B*. Come è possibile determinare il valore esatto del costo marginale in un punto preciso? Si potrebbe costruire un grafico molto accurato, calcolando il costo totale per ogni possibile livello di produzione per poi misurare l'inclinazione della tangente nel punto di nostro interesse. In riferimento al punto B (dove $Q = 6$) la retta tangente alla curva del costo totale in quel punto ha un'inclinazione pari a 28: questo significa che, quando $Q = 6$, il costo marginale di produzione è di € 28. Similmente, è possibile dimostrare che, quando $Q = 2$, il costo marginale è di € 12, dal momento che, in quel punto (denotato con *E*), la retta tangente alla curva del costo totale ha un'inclinazione pari a 12.

La quarta colonna della Tabella A.1 mostra il valore esatto, nel "punto", del costo marginale in corrispondenza delle quantità considerate. Come vedremo più avanti, anziché disegnare il grafico in misura accurata e calcolare poi le inclinazioni esatte delle rette, è possibile determinare il costo marginale in modo più immediato, attraverso il calcolo. (Si veda, a tal proposito, l'Esercizio "Learning-By-Doing" A.5.)

La relazione fra valori medi e valori marginali

Il **valore medio** rappresenta il valore complessivo assunto dalla variabile dipendente, diviso per il valore assunto dalla variabile indipendente. La Tabella A.1 riporta anche i dati relativi al costo medio, dato dal costo totale diviso per la quantità prodotta, ovvero C/Q. Il costo medio è riportato nella colonna 5. Ovviamente, anche per il costo medio è possibile una rappresentazione grafica. Consideriamo il grafico della Figura A.2; possiamo dimostrare che il costo medio, in corrispondenza di ogni quantità, è dato dall'inclinazione del segmento che congiunge l'origine degli assi con la curva del costo totale. Determiniamo, per esempio, il costo medio di produzione nel punto E, ovvero quando $Q = 2$. Tracciamo allora il segmento *OE* che collega l'origine degli assi ed il punto *E*. L'inclinazione di questo segmento corrisponde al costo totale (in questo caso, uguale a € 48) diviso per la quantità prodotta (pari a 2): tale inclinazione ci dà quindi un costo medio di produzione pari a € 24. In riferimento allo stesso punto, il valore del costo medio è, in genere, diverso da quello del costo marginale. Quando $Q = 2$, abbiamo calcolato in precedenza che il costo medio è 24 (tale era l'inclinazione del segmento che unisce il punto *E* e l'origine).

Guardiamo a come sono stati rappresentati questi valori del costo medio e del costo marginale nella Figura A.2(b). In un grafico a parte, è disegnata la curva del costo totale e, in un altro, le curve del costo marginale e del costo medio. Le unità di costo sono espresse in termini monetari (in euro, per esempio). Di conseguenza, le unità di costo marginale ($\Delta C / \Delta Q$) e quelle di costo medio (C/Q) sono espresse in termini di *euro per unità.* La dimensione del costo totale è quindi diversa da quella dei costi marginali e medi.

È fondamentale comprendere bene la relazione tra valore marginale e valore medio. Dato che il valore marginale esprime il saggio al quale varia il valore totale, è possibile verificare che:

- Il valore medio deve necessariamente *aumentare* se il valore marginale è *maggiore* di quello medio.
- Il valore medio deve necessariamente *ridursi* se il valore marginale è *minore* di quello medio.
- Il valore medio è *costante* quando il valore marginale *uguaglia* quello medio.

Queste relazioni sono valide qualsiasi sia la variabile e l'unità di misura che consideriamo. Supponiamo, per esempio, che l'altezza media degli studenti di una classe sia pari a 180 centimetri. Supponiamo ora che arrivi un nuovo studente, la cui altezza è 190 centimetri; dal momento che la sua altezza eccede quella media degli altri studenti, l'altezza media deve per forza di cose aumentare a seguito dell'arrivo del nuovo studente. Se, invece, l'altezza del nuovo arrivato fosse stata 160 centimetri, l'altezza media della classe sarebbe, inevitabilmente, diminuita. Se, infine, il nuovo arrivato fosse alto esattamente 180 centimetri, non osserveremmo alcuna variazione dell'altezza media della classe.

La relazione fra costo medio e costo marginale

Questo esempio può chiarire ulteriormente la relazione fra valori medi e valori marginali. Il riferimento è alle curve dei costi medi e marginali rappresentate nella Figura A.2(b).

Problema: utilizza la relazione fra costi medi e costi marginali per spiegare se e perchè la curva dei costo medio risulta crescente, decrescente o costante in corrispondenza dei seguenti livelli di produzione:

(a) $Q = 2$
(b) $Q = 5$
(c) $Q = 6$

Soluzione:

(a) Quando $Q = 2$, la curva del costo marginale giace al *di sotto* della curva del costo medio e quindi la curva del costo medio risulta decrescente (ha quindi un'inclinazione negativa).

(b) Quando $Q = 5$, la curva del costo marginale si interseca con la curva del costo medio; la curva del costo medio non può essere né crescente né decrescente ed ha quindi inclinazione pari a zero per quel livello di *output*. Questo significa che stiamo considerando il punto di minimo della curva del costo medio. (Discuteremo come individuare i punti di minimo e di massimo di una funzione più avanti.)

(c) Quando $Q = 6$, la curva del costo marginale giace al *di sopra* della curva del costo medio e quindi la curva del costo medio risulta crescente (ha infatti un'inclinazione positiva).

A.3 LE DERIVATE

Nella Figura A.2 avevamo mostrato uno dei modi possibili per calcolare il costo marginale, rappresentando la curva dl costo totale in modo accurato per poi calcolare con precisione l'inclinazione della curva in corrispondenza dei vari livelli di produzione. Oltre che dispendioso in termini di tempo e fatica, questo procedimento non sempre consente comunque di ottenere una misura affinata del costo marginale. Risulta certamente preferibile procedere a tale misura ricorrendo alle tecniche del calcolo differenziale, che consentono di individuare i valori marginali in modo molto più semplice e preciso. Supponiamo che y sia la variabile dipendente e che x sia la variabile indipendente in una funzione del tipo: $y = f(x)$

Consideriamo ora la Figura A.3, nella quale il valore della variabile dipendente è, come al solito, riportato sull'asse verticale, mentre sull'asse orizzontale sono riportati i valori della variabile indipendente. Come già detto in precedenza, se y misura il valore totale, l'inclinazione della curva in ciascun punto fornisce una misura del valore marginale. (Se, per esempio, y misurasse il costo totale e x la quantità, l'inclinazione della funzione di costo rappresenterebbe il costo marginale per ciascuno dei livelli di produzione considerati.)

Per trovare l'inclinazione di una curva in ciascuno dei suoi punti, facciamo ricorso al concetto di **derivata**. Vediamo un'applicazione concreta di tale concetto, considerando la Figura A.3. Partiamo da un'approssimazione algebrica della pendenza del grafico. La funzione $y = f(x)$ rappresenta una curva, per cui sappiamo che la sua inclinazione varia nel momento in cui ci muoviamo lungo la curva stessa.

Potremmo approssimare l'inclinazione della curva nel punto *E*, per esempio, scegliendo due punti sulla curva stessa, come *E* ed *F*. Tracciamo ora il segmento che unisce questi due punti. La pendenza di tale segmento, che abbiamo chiamato *EF,* è data dal rapporto fra la distanza verticale ($\Delta y = y_3 - y_1$) e quella orizzontale ($\Delta x = x_3 - x_1$). Di conseguenza, l'inclinazione di *EF* è data da $\Delta y / \Delta x = (y_3 - y_1) / (x_3 - x_1)$. Come si evince dal grafico, l'inclinazione di *EF* non costituisce però una misura esatta dell'inclinazione della retta tangente nel punto *E*, ma una semplice approssimazione. Per come è disegnata la curva, l'inclinazione di *EF* è infatti inferiore a quella della retta tangente nel punto *E*.

È possibile ottenere un'approssimazione più accurata scegliendo un punto sulla curva più vicino ad E rispetto al punto F. Consideriamo allora, per esempio, i punti *E* e *B,* che presentano una distanza laterale notevolmente inferiore rispetto alla coppia precedente *E* e *F*. Tracciamo il segmento che unisce i due punti in esame e denotiamolo con *EB*. L'inclinazione del segmento *EB* è data da $\Delta y / \Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$. Anche in questo caso, il grafico evidenzia come questa non rappresenti una misura esatta dell'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto *E* (che risulta ancora sottostimata), ma questa è un'approssimazione sicuramente migliore rispetto a quella precedente. Se scegliessimo un punto ancora più vicino a *E*, la nostra approssimazione migliorerebbe ulteriormente, avvicinandosi sempre più al vero valore dell'inclinazione della tangente nel punto *E*. Quando consideriamo due punti sulla curva davvero molto vicini (con Δx prossimo a zero), l'errore di approssimazione tende a zero.

Il valore dell'approssimazione per Δx tendente a zero rappresenta la derivata della funzione, scritta solitamente come dy / dx. Esprimiamo ora il concetto di derivata in termini più formali, come segue:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{(A.5)}$$

L'espressione "$\lim_{\Delta x \to 0}$" indica che stiamo valutando $\Delta y / \Delta x$ "al limite", ovvero quando Δx tende a zero. Il valore della derivata della funzione (dy / dx) nel punto *E* fornisce una misura esatta della pendenza del grafico in quel preciso punto.

A.4 COME CALCOLARE UNA DERIVATA

In questa sezione mostreremo come calcolare la derivata per alcune delle forme funzionali più comuni nelle applicazioni economiche. Per approfondire maggiormente il tema del calcolo delle derivate, è possibile utilizzare un qualsiasi manuale di analisi matematica, nel quale sarà possibile trovare, senza alcun dubbio, anche le derivate relative a forme funzionali non considerate in questo testo.

Derivata di una costante

Se la variabile dipendente y è in realtà una costante, la sua derivata rispetto alla variabile x è, banalmente, zero. In altre parole, supponiamo che $y = k$, dove k è una costante. È possibile dimostrare che, in questo caso, $dy / dx = 0$.

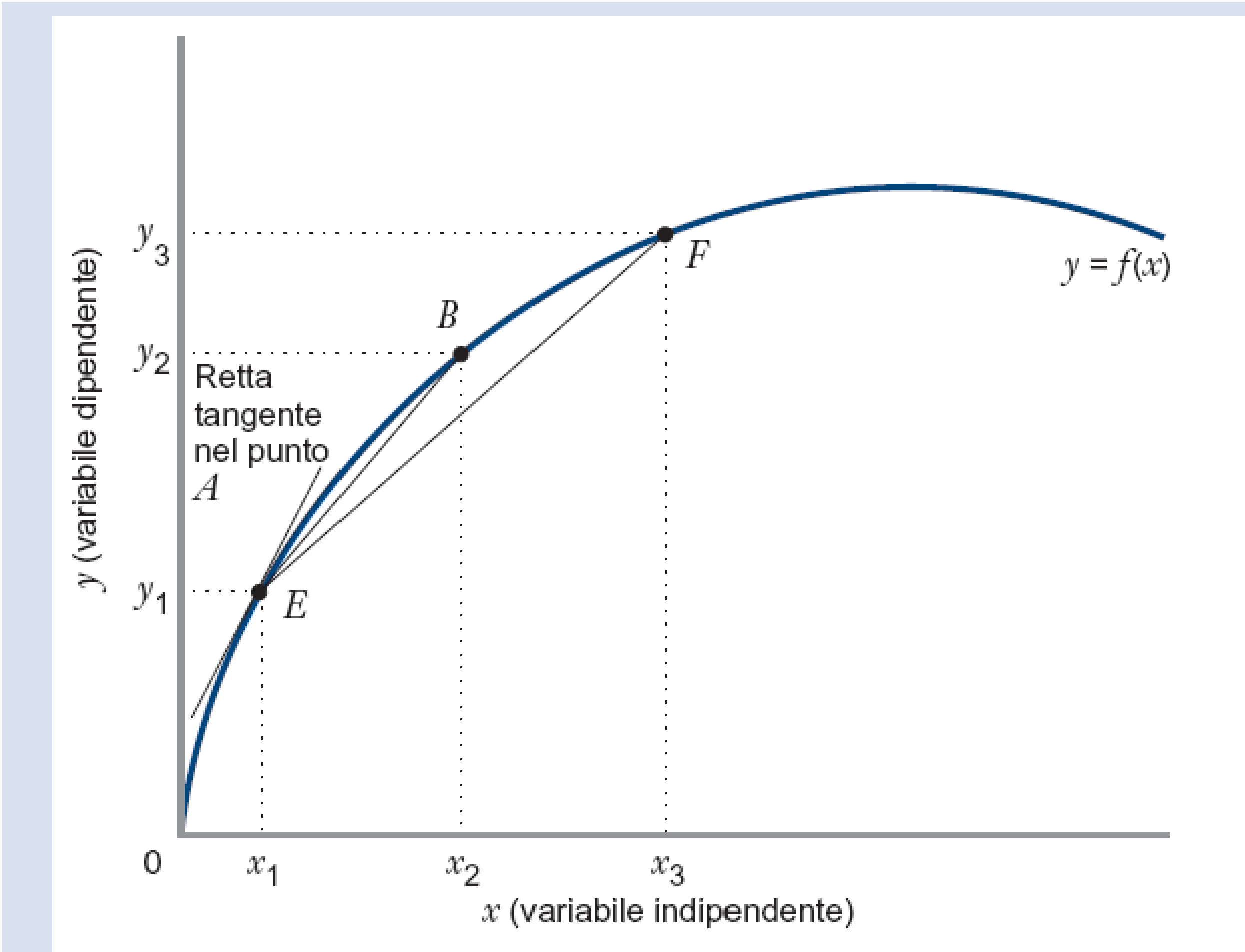


FIGURA A.3 Il significato della derivata di una funzione
Quando $x = x_1$, la derivata di y rispetto a x (ovvero dy / dx) ci dà l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto *E*.

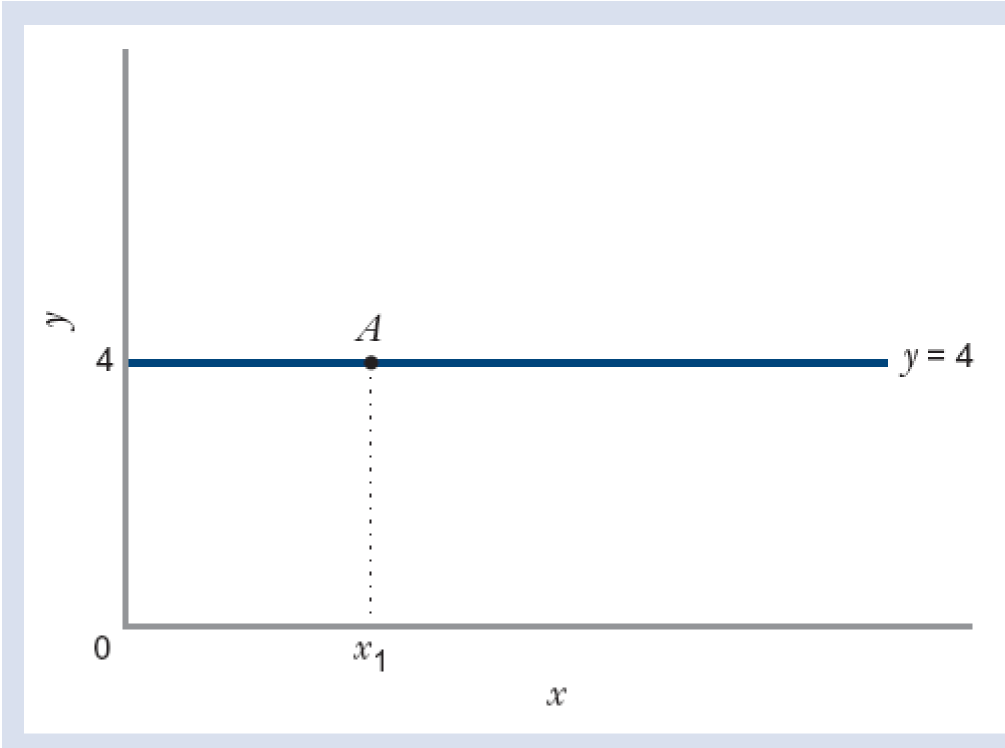


FIGURA A.4 Derivata di una constante
Il grafico si riferisce alla funzione $y = 4$. Siccome il valore di y non varia al variare di x, il grafico può essere rappresentato attraverso una linea perfettamente orizzontale. L'inclinazione è sempre pari a zero, così come la derivata della funzione: $dy/dx = 0$.

Consideriamo, per esempio, la funzione $y = 4$, rappresentata graficamente nella Figura A.4. L'inclinazione di tale curva può essere calcolata in due modi. In primo luogo, siccome la curva è in realtà una retta, sappiamo che il valore di y non cambia al variare di x; possiamo quindi concludere che l'inclinazione di tale retta è zero.
Il secondo modo per calcolare l'inclinazione passa invece attraverso il calcolo della derivata. Siccome la derivata di una costante è sempre uguale a zero, possiamo concludere che $dy / dx = 0$. La derivata è sempre zero, per cui il grafico della funzione $y = 4$ ha pendenza nulla.

Derivata di una potenza

Consideriamo una funzione della seguente forma:

$$y = ax^b \qquad \text{(A.6)}$$

a e b rappresentano due costanti. La derivata di una funzione di questo tipo è:

$$\frac{dy}{dx} = bax^{b-1} \qquad \text{(A.7)}$$

Consideriamo un esempio: supponiamo che $y = 4x$ e guardiamo alla rappresentazione grafica di tale funzione, mostrata nella parte sinistra della Figura A.5. Siccome la funzione è rappresentata da una retta, l'inclinazione risulta costante in ciascuno dei suoi punti. Di nuovo, possiamo calcolare l'inclinazione di questa retta seguendo due diverse procedure. Possiamo prendere due punti, come A e *B,* e calcolare l'inclinazione come $\Delta y / \Delta x = (16 - 8)/(4 - 2) = 4$. In alternativa, possiamo calcolare la derivata della funzione: $y = 4x$ è infatti una funzione del tipo descritto nell'Equazione (A.6), dove $a = 4$ e $b = 1$. Come mostrato nell'Equazione (A.5), la derivata è quindi $dy / dx = bax^{b-1} = 4(1)x^{1-1} = 4\,x^0 = 4$. Dato che la derivata dy / dx è sempre pari a 4, l'inclinazione della retta rappresentante la funzione $y = 4x$ è 4 in corrispondenza di ciascuno dei suoi punti.

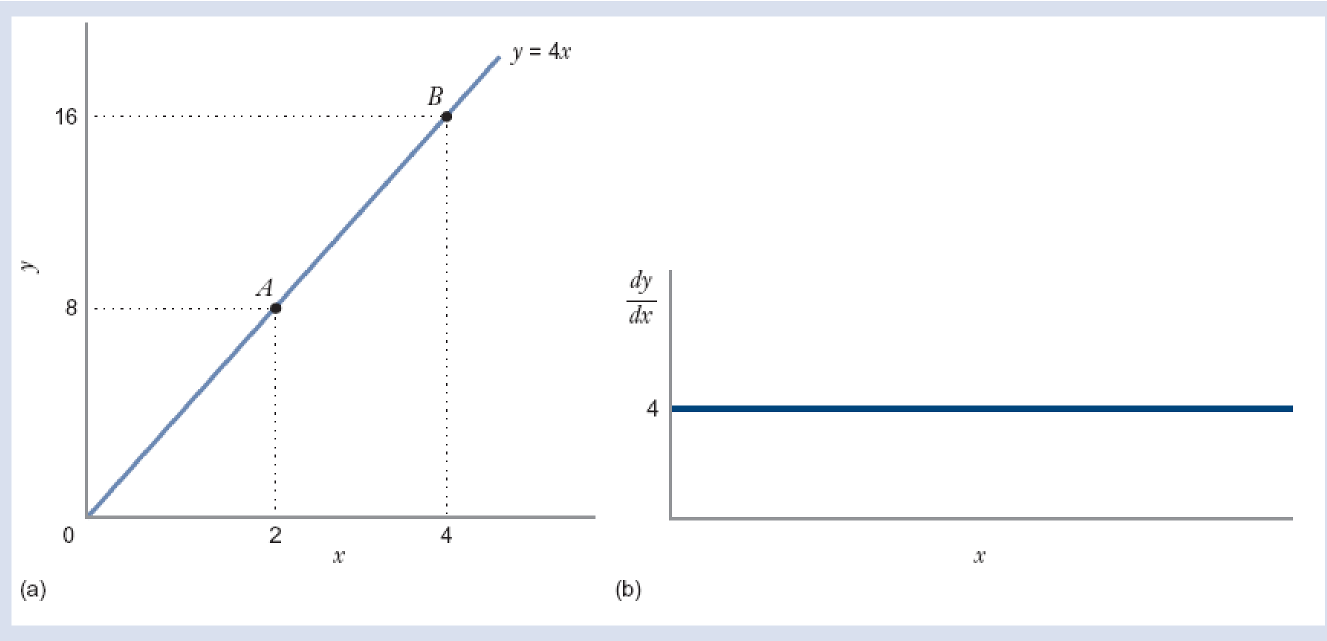


FIGURA A.5 **Derivata di *y* = 4*x***
Il riquadro (a) mostra la funzione $y = 4x$. L'inclinazione di questo grafico è pari a 4. Utilizzando la regola di derivazione per le potenze, troviamo che la derivata di tale funzione è data da $dy / dx = 4$. Rappresentiamo graficamente anche la derivata, nel riquadro (b) della figura. Il fatto che la derivata sia sempre 4 significa che l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) non cambia mai e resta quindi sempre uguale a 4.

Derivata di una funzione con potenze

Consideriamo la funzione $y = 3x^2$, rappresentata graficamente nella Figura A.6(a).

Problema: trova l'inclinazione di questa curva quando

(a) $x = -1$
(b) $x = 0$
(c) $x = +2$

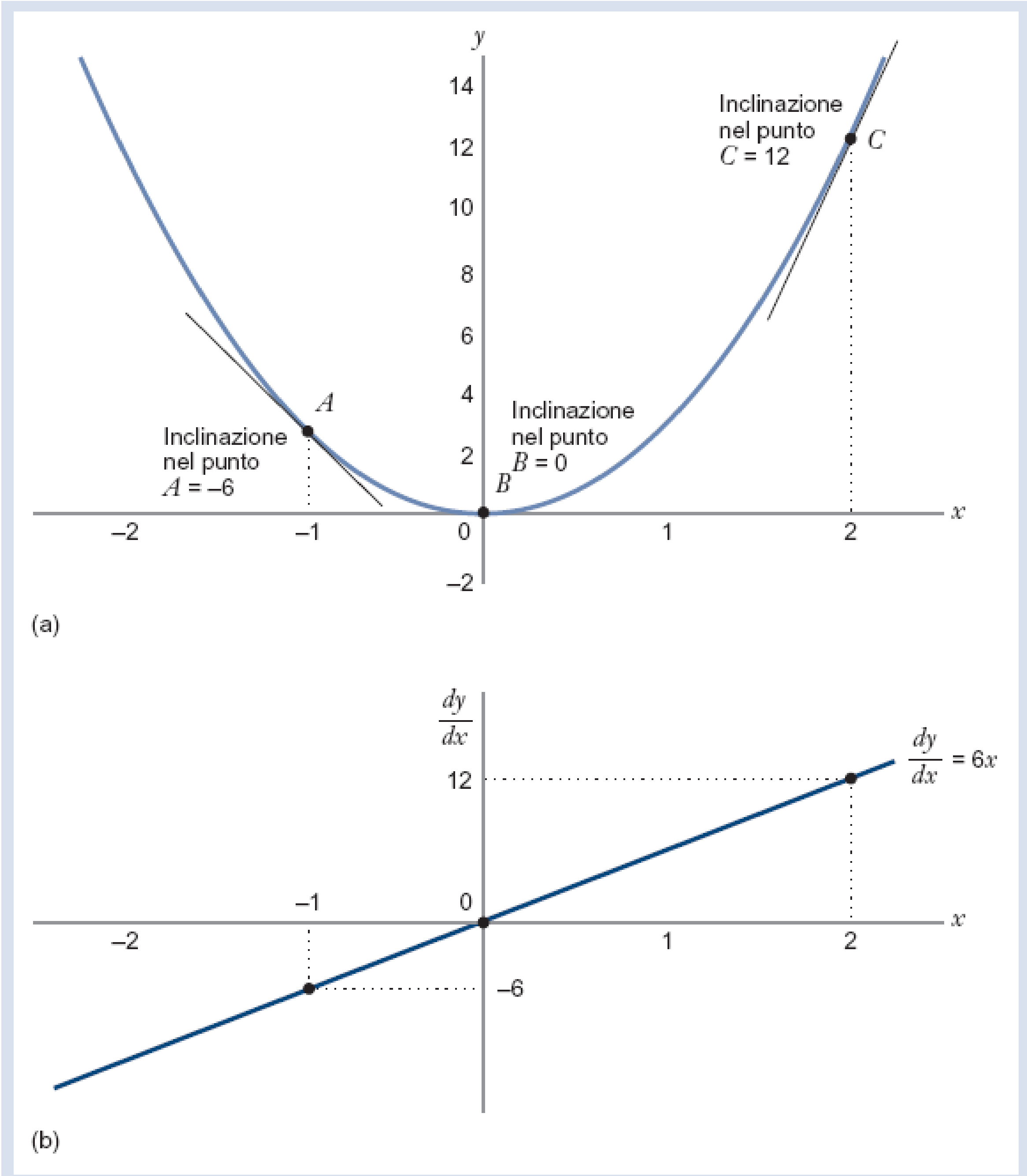


FIGURA A.6 Derivata di y = 3x²
Il riquadro (a) mostra la funzione $y = 3x^2$. L'inclinazione del grafico varia nel momento in cui varia il valore di x. Utilizzando le regole di derivazione per le potenze, troviamo che la derivata è, in questo caso, $dy / dx = 6x$. Il riquadro (b) della figura propone proprio una rappresentazione grafica della derivata. Quando $x = -1$, il valore della derivata è −6. Quindi l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) è −6 in corrispondenza di $x = -1$. In modo simile, la derivata della funzione indica che l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) è invece pari a zero in corrispondenza di $x = 0$ ed è 12 in corrispondenza di $x = 2$.

Soluzione:

(a) Sappiamo che $y = 3x^2$ è una funzione con potenza di quelle riconducibili all'Equazione (A.6); in questo caso, $a = 3$ e $b = 2$. Come mostrato nell'Equazione (A.7), la derivata è quindi $dy / dx = bax^{b-1} = 6x$. [Il grafico relativo a questa derivata è mostrato nella Figura A.6(b).] L'inclinazione della curva associata alla funzione $y = 3x^2$ risulta quindi pari a $6x$. Quando $x = -1$, il valore della derivata è allora: $dy / dx = 6(-1) = -6$. Da ciò, ne consegue che, nel punto A del riquadro (a) della figura, l'inclinazione della curva $y = 3x^2$ è −6.
(b) Quando $x = 0$, il valore della derivate è: $dy / dx = 6(0) = 0$. Di conseguenza, l'inclinazione della curva $y = 3x^2$ nel punto B è zero.

(c) Quando $x = 2$, il valore della derivate è: $dy/dx = 6(2) = 12$. Questo significa che, in corrispondenza del punto C, la curva $y = 3x^2$ ha un'inclinazione pari a 12.

Consideriamo la Figura A.6. Possiamo determinare l'inclinazione della curva mostrata nel riquadro (a) per ciascuno dei punti presi in considerazione seguendo due percorsi differenti. Possiamo, innanzitutto, costruire il grafico della funzione in modo meticoloso e tracciare le tangenti alla curva nei punti considerati. Per esempio, se volessimo determinare la pendenza della curva nel punto A, potremmo tracciare la tangente in quel punto e misurarne l'inclinazione. Eseguendo il procedimento in maniera corretta, troveremmo un'inclinazione pari a −6. Tuttavia, questo è un approccio macchinoso e a forte rischio di errori, soprattutto tenendo conto del fatto che l'inclinazione della curva varia al variare di x. Risulta molto più facile e sicuro ricorrere al calcolo della derivata della funzione, per poi calcolare il valore della derivata stessa in corrispondenza di ciascuno dei punti a cui siamo interessati.

Utilità e utilità marginale

Data la funzione di utilità $U(y) = \sqrt{y}$, l'utilità marginale è $MU(y) = 0{,}5\sqrt{y}$.

Problema: dimostra che l'utilità marginale corrisponde effettivamente a tale funzione.

Soluzione: l'utilità marginale $MU(y)$ misura l'inclinazione della curva che rappresenta la funzione di utilità ed è quindi la derivata di tale funzione, ovvero dU / dy. Possiamo calcolare agevolmente tale derivata, dal momento che anche $U(y) = \sqrt{y}$ rappresenta una funzione con potenza, del tutto simile a quelle che abbiamo esaminato in precedenza. Tale funzione può infatti essere riscritta come $U(y) = y^{1/2}$. Possiamo quindi ricondurre questa particolare funzione di utilità al caso generale $U = ay^b$, imponendo che, in questo caso specifico, $a = 1$ e $b = 1/2$. La derivata è quindi $dU / dy = bay^{b-1} = (1/2)\, y^{(1/2)-1} = 0{,}5\, y^{-1/2} = 0{,}5\sqrt{y}$.

Derivata di un logaritmo naturale

Una funzione logaritmica può essere formulata, in termini generali, come segue:

$$y = \ln x \qquad \text{(A.8)}$$

L'espressione "ln" significa che stiamo considerando il logaritmo naturale del numero che segue. La derivata di questo genere di funzioni è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{(A.9)}$$

Derivata della funzione esponenziale $y = e^x$

La derivata della funzione esponenziale $y = e^x$ è uguale a se stessa:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Derivata di somme e differenze

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due diverse funzioni di x. Supponiamo inoltre che y sia la somma di f e g, ovvero $y = f(x) + g(x)$. La derivata di y rispetto a x è la somma delle derivate di f e g rispetto ad x. In termini formali, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Come esempio, supponiamo che $f(x) = 5x^2$ e che $g(x) = 2x$. Sia la funzione f che la funzione g sono potenze e le loro derivate sono, rispettivamente, $df / dx = 10x$ e $dg / dx = 2$. Se $y = f(x) + g(x) = 5x^2 + 2x$, allora $dy / dx = (df / dx) + (dg / dx) = 10x + 2$.

In modo analogo, se y fosse invece la differenza fra f e g, vale a dire $y = f(x) - g(x)$, avremmo allora che la derivata di y rispetto a x sarebbe la differenza fra le derivate di f e g:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Derivate di somme e differenze

Consideriamo la funzione di costo introdotta nell'Esercizio A.1: $C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$

Problema: Trova il costo marginale di produzione quando:

(a) $Q = 2$
(b) $Q = 5$
(c) $Q = 6$

Soluzione: Il costo marginale $MC(Q)$ è la derivata della funzione del costo totale: dC / dQ. La funzione del costo totale è costituita da tre termini che formano una somma e una differenza di potenze. Applicando le regole di derivazione note, possiamo quindi concludere che il costo marginale è dato da: $C(Q) = 3Q^2 - 20Q + 40$.

(a) Quando $Q = 2$, il costo marginale è $MC(2) = 3(2)^2 - 20(2) + 40 = 12$. Tale costo marginale rappresenta l'inclinazione della curva del costo totale nel riquadro (a) della Figura A.2 in corrispondenza di un livello di produzione pari a 2. Il valore numerico del costo marginale è invece riportato nel riquadro (b) della stessa figura.

(b) Quando $Q = 5$, il costo marginale è $MC(5) = 3(5)^2 - 20(5) + 40 = 15$.

(c) Quando $Q = 6$, il costo marginale è invece $MC(6) = 3(6)^2 - 20(6) + 40 = 28$.

Nota che il costo marginale calcolato in questo problema coincide con quello riportato nella quarta colonna della Tabella A.1.

Derivata di un prodotto

Supponiamo che y sia il prodotto delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, ovvero $y = f(x)g(x)$. La derivata di y rispetto a x, in questo caso, è data da:

$$\frac{dy}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

Come esempio, assumiamo che $f(x) = x^2$ e che $g(x) = (6 - x)$. La funzione f è una potenza, mentre la funzione g è la somma di potenze. Le loro derivate sono quindi, rispettivamente, $df / dx = 2x$ e $dg / dx = -1$. Se $y = f(x)g(x) = x^2(6 - x)$, allora $dy / dx = f(dg / dx) + g(df / dx) = x^2(-1) + (6 - x)(2x) = -3x^2 + 12x$. Per verificare questa riposta, possiamo espandere la funzione $y = x^2(6 - x) = 6x^2 - x^3$ per poi calcolare la derivate di questa funzione, che è poi una differenza di potenze. Applicando le regole di derivazione ormai note, arriviamo alla conclusione che $dy / dx = 12x - 3x^2$.

Derivata di un quoziente

Supponiamo che y sia dato dal rapporto fra la funzione $f(x)$ e la funzione $g(x)$, vale a dire:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La derivata di y rispetto a x è data da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Come esempio, assumiamo che $f(x) = x^2$ e che $g(x) = (6 - x)$. Come prima, tanto f quanto g sono potenze e già sappiamo che le loro derivate sono, rispettivamente, $df / dx = 2x$ e $dg / dx = -1$. Pertanto, se il quoziente è:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(6 - x)}$$

la derivata sarà quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{(6 - x)(2x) - (x^2)(-1)}{(6 - x)^2}$$

Derivata di una funzione composta

La derivata di una funzione composta è pari al prodotto delle derivate. Se $y = f(g(x))$ allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Derivate successive alla prima

La derivata di una funzione è essa stessa una funzione e si indica nel modo seguente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$$

o anche come $f''(x)$. Ad esempio la derivata di $y = x^2$ è $dy / dx = 2x$ e dunque $d^2y / dx^2 = 2$.

Esistono altre regole di derivazione relative ad altre forme funzionali tipiche. Tuttavia, le regole che abbiamo discusso in questa sezione sono più che sufficienti per poter analizzare, attraverso il calcolo, le applicazioni economiche contenute in questo testo.
Per riassumere, le derivate sono utili per aiutarci a comprendere e a quantificare molti dei concetti economici riferiti al termine "marginale" (tra cui il concetto di utilità marginale, di costo marginale e di ricavo marginale).

- Supponiamo che la funzione che misura il livello complessivo di utilità di un individuo sia $U(Q)$. Il valore della derivata di tale funzione dU/dQ calcolato per un particolare livello di Q misura l'inclinazione della curva dell'utilità e fornisce una misura dell'utilità marginale in corrispondenza di quella data quantità.
- Supponiamo che la funzione del costo totale di produzione sia $C(Q)$. Il valore della derivata dC / dQ in riferimento ad un particolare livello di Q misura l'inclinazione della curva del costo totale nel punto considerato e fornisce una misura del costo marginale di produzione per quella quantità prodotta.
- Supponiamo che la funzione del ricavo totale sia $R(Q)$. Il valore della derivata dR / dQ in corrispondenza di un dato livello di Q rappresenta l'inclinazione della curva del ricavo totale e costituisce una misura del ricavo marginale per la quantità considerata.

A.5 PROBLEMI DI MASSIMIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE

Le derivate possono essere utili anche per individuare i punti di massimo e di minimo delle funzioni. Supponiamo che y, la variabile dipendente, sia misurata lungo l'asse verticale di un grafico nel quale, come solito, riportiamo invece lungo l'asse orizzontale i valori della variabile indipendente x.
L'idea fondamentale che vogliamo sviluppare ora è questa: *il minimo o il massimo di una funzione vengono raggiunti solamente quando l'inclinazione della curva che rappresenta la funzione è uguale a zero.* In alter parole, nel punto di massimo o di minimo, la derivata dy / dx deve risultare uguale a zero.
Consideriamo un esempio in cui siamo interessati ad individuare il punto di massimo di una funzione, in questo caso $y = -x^2 + 6x + 1$. La Figura A.7 mostra il grafico di tale funzione. Sappiamo che, in corrispondenza del punto di massimo, l'inclinazione della curva è nulla. Siccome l'inclinazione è data dalla derivata della funzione, dobbiamo quindi cercare quel particolare valore di x che rende la derivata uguale a zero. Osserviamo che y è una somma di potenze, per cui, sulla base delle solite regole di derivazione, possiamo concludere che la sua derivata è $dy / dx = -2x + 6$. Nel punto di massimo, la derivata si annulla: $dy / dx = -2x + 6 = 0$. La derivata diventa uguale a zero quando $x = 3$. Di conseguenza, il valore di massimo della funzione y risulta essere: $y = -3^2 + 6(3) + 1 = 10$.
Passiamo ora ad una funzione con un punto di minimo. Consideriamo ancora la Figura A.6, in cui è mostrata la curva che rappresenta la funzione $y = 3\,x^2$. Possiamo calcolare la sua derivata per verificare se, effettivamente, tale funzione ha un minimo in corrispondenza di $x = 0$. Sappiamo che, nel punto di minimo, l'inclinazione della curva è pari a zero. Siccome l'inclinazione è data dalla derivata, dobbiamo individuare il valore di x che annulla la derivata. Come mostrato in precedenza, la derivata è data, in questo caso, da $dy / dx = 6x$. Nel punto di minimo, tale valore deve risultare nullo: $dy / dx = 6x = 0$. Di conseguenza, possiamo concludere che $x = 0$: in corrispondenza di tale valore di x, la funzione y assume dunque il suo valore di minimo.
Come dimostrano questi esempi, nel momento in cui la derivata si annulla possiamo avere sia un punto di minimo che un punto di massimo. Anche se osserviamo il valore per cui $dy / dx = 0$, tale informazione non è di per sé sufficiente per poter dire se il punto individuato è un punto di massimo o di minimo. Per poter distinguere fra i due casi, occorre esaminare la derivata seconda di y rispetto ad x, denotata con d^2y / dx^2. La derivata seconda di una funzione è la derivata della derivata prima della funzione stessa, dy / dx.
In altre parole, la derivata prima (dy/dx) della funzione indica l'inclinazione della relative curva; la derivata seconda misura invece se l'inclinazione della curva è crescente o decrescente all'aumentare di x. Se la derivata seconda è negativa, l'inclinazione diviene meno

positiva (o più negativa) all'aumentare di x. Se la derivata seconda risulta invece positive, questo significa che l'inclinazione della curva diventa più positiva (o meno negativa) man mano che x aumenta.

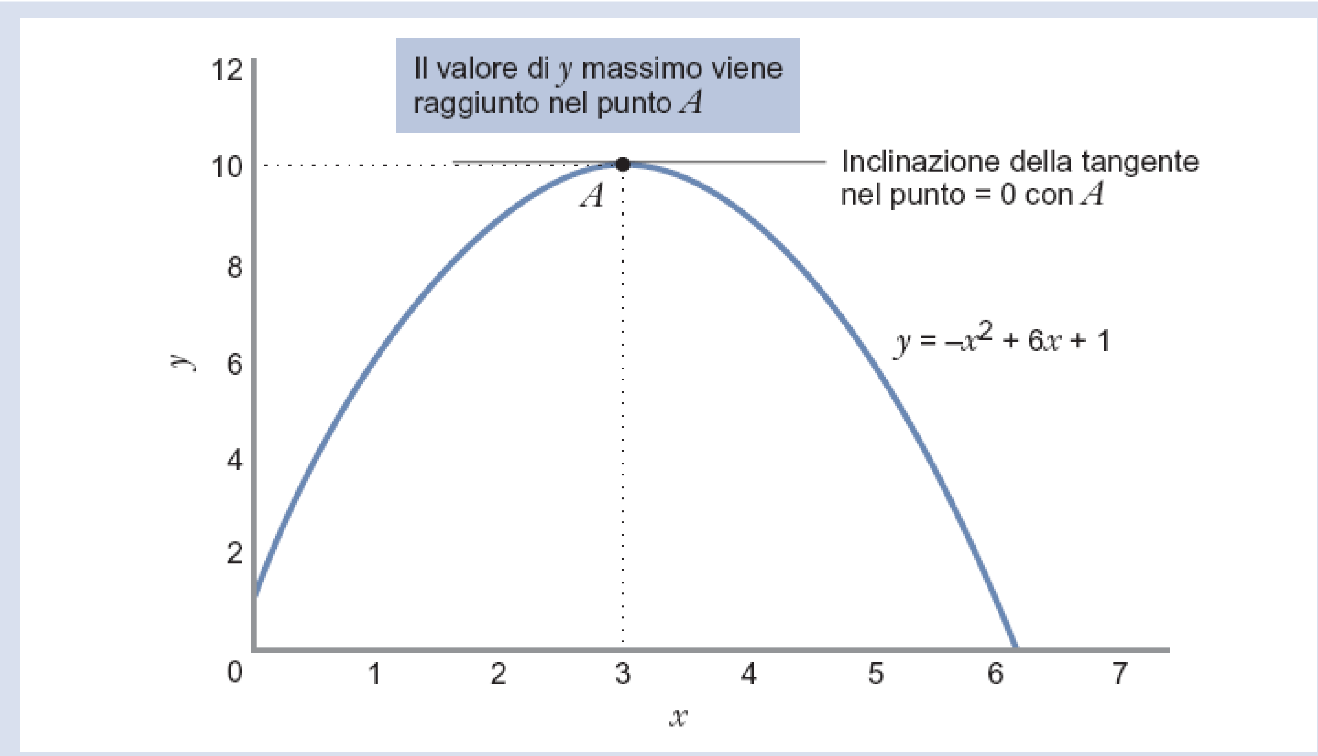


FIGURA A.7 Massimizzare una funzione
Il grafico illustra come la funzione in esame raggiunga il suo punto di massimo quando la sua inclinazione è zero. Nel punto A, in corrispondenza del quale $x = 3$, y raggiunge il suo valore massimo ($y = 10$). L'inclinazione della curva - ed, equivalentemente – il valore della derivata dy / dx – risulta quindi essere nulla nel punto A.

- Se nel punto considerato $dy / dx = 0$ e $d^2y / dx^2 < 0$, allora abbiamo individuato un punto di massimo della funzione.
- Se nel punto considerato $dy / dx = 0$ e $d^2y / dx^2 > 0$, allora abbiamo individuato un punto di minimo della funzione.

Per vedere come utilizzare la derivata seconda per capire se il punto individuato è un punto di massimo o di minimo, consideriamo ancora la funzione $y = - x^2 + 6x + 1$, mostrata nella Figura A.7. Abbiamo già calcolato che l'inclinazione della curva è zero in corrispondenza di $x = 3$, il valore di x che annulla la derivata della funzione, $dy / dx = -2x + 6$. Possiamo verificare che questo grafico raggiunge un punto di massimo (e non di minimo) studiando il segno della derivata seconda. La derivata di $-2x + 6$ rispetto a x rappresenta la derivata seconda, ragion per cui possiamo scrivere: $d^2y / dx^2 = -2$. Siccome la derivata seconda è negativa, l'inclinazione della curva diviene meno positiva nel momento in cui ci avviciniamo a $x = 3$ e diviene più negativa nel momento in cui ci allontaniamo da tale punto, considerando valori di x superiori a 3. Questa è la dimostrazione che il grafico disegnato raggiunge un massimo per $x = 3$.

In maniera speculare, possiamo utilizzare la derivata seconda per mostrare come la curva rappresentata nella Figura A.6 raggiunga un minimo (e non un massimo) quando $x = 0$. Abbiamo già trovato che l'inclinazione della curva è nulla per $x = 0$, il valore di x che rende uguale a zero la derivata della funzione, $dy / dx = 6x$. La derivata di $6x$ rispetto ad x è la derivata seconda della funzione: $d^2y / dx^2 = 6$. Dato che la derivata seconda è positiva, sappiamo che l'inclinazione del grafico diviene meno negativa quando ci avviciniamo a $x = 0$ partendo da valori di x inferiori e diviene invece più positiva se ci allontaniamo da $x = 0$, passando a valori di x sempre più elevati. Tutto ciò conferma come la curva abbia un minimo in corrispondenza di $x = 0$.[2]

Utilizzare la derivata per individuare il minimo

Consideriamo una volta ancora la funzione del costo totale: $C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$
La funzione del costo medio $AC(Q)$ è data da $C(Q)/Q$: $AC(Q) = Q^2 - 10Q + 40$

---

2 L'analisi condotta in questa Appendice mostra come applicare il calcolo delle derivate per individuare massimi e minimi locali. Tuttavia, molte funzioni sono caratterizzate da più punti di minimo e/o di massimo. Per poter individuare il massimo globale di una funzione occorre confrontare i valori assunti dalla funzione in corrispondenza di tutti i punti di massimo locale individuati e identificare quello in corrispondenza del quale la funzione assume il valore più elevato. Allo stesso modo, per individuare il minimo globale occorre confrontare i valori assunti dalla funzione in tutti i punti di minimo locale e trovare quello in corrispondenza del quale la funzione assume il valore più basso.

Il riquadro (b) della Figura A.2 mostra la curva del costo medio relativa a tale funzione.

Problema:

(a) Attraverso il calcolo della derivata, verifica che il minimo della funzione del costo medio viene raggiunto quando $Q = 5$. Mostra inoltre che, nel punto di minimo, il valore del costo medio è pari a 15.
(b) Attraverso il calcolo della derivata seconda, verifica che il punto individuato rappresenti effettivamente un punto di massimo e non di minimo.

Soluzione:

(a) La curva del costo medio raggiunge il suo minimo quando la sua inclinazione è zero, il che avviene quando la sua derivata dAC / dQ diventa uguale a zero. Osserviamo che la funzione $AC(Q)$ è una somma di potenze. La sua derivata è quindi: $dAC / dQ = 2Q - 10$. Imponendo che tale derivata sia nulla, scopriamo che la quantità che minimizza il costo medio è $Q = 5$. Il valore di minimo del costo medio è quindi $AC(5) = 5^2 - 10(5) + 40 = 15$.
(b) La derivata seconda della funzione del costo medio è $d^2AC / dQ^2 = 2$. Siccome la derivata seconda è positiva, l'inclinazione del grafico diviene sempre meno negativa quanto più ci si avvicina a $Q = 5$ partendo da valori inferiori e diventa sempre più positiva allontanandosi da questo punto e passando quindi a livelli di Q superiori a 5. Questo conferma che la curva del costo medio ha un punto di minimo (e non di massimo) in corrispondenza di $Q = 5$.

Regola per la scelta della quantità ottimale

Una volta che è chiaro come utilizzare il calcolo per individuare massimi e minimi delle funzioni, possiamo provare ad applicare queste tecniche a semplici problemi economici. Partiamo quindi dalla determinazione della regola per la scelta della quantità ottimale di *output* da parte di un'impresa che intenda massimizzare i propri profitti, assumendo i prezzi come dati. Nel Capitolo 11 abbiamo visto come un'impresa *price-taker* massimizzi il proprio profitto producendo esattamente quel livello di *output* in corrispondenza del quale il costo marginale risulta uguale al prezzo. La variabile dipendente è, in questo caso, il profitto dell'impresa (denotato con π) che corrisponde alla differenza fra i ricavi totali dell'impresa (dati dal prezzo di mercato, P, moltiplicato per la quantità prodotta e venduta, Q) ed i costi totali di produzione, $C(Q)$. Possiamo quindi scrivere:

$$\pi = PQ - C(Q)$$

Siccome possiede solo una piccola quota di mercato, l'impresa non controlla il prezzo di mercato P, che va quindi considerato come dato. Per massimizzare i suoi profitti, l'impresa deve quindi scegliere il livello di produzione Q in modo che l'inclinazione della curva dei profitti risulti pari a zero (si veda la Figura 11.1).
In termini algebrici, l'impresa deve individuare il valore di Q tale per cui $d\pi / dQ = 0$. La derivata della funzione π è:

$$\frac{d\pi}{dQ} = P - \frac{dC}{dQ}$$

Siccome dC / dQ rappresenta il costo marginale di produzione, per poter massimizzare i suoi profitti l'impresa deve quindi scegliere Q in modo da uguagliare il costo marginale al prezzo, producendo in modo da verificare la condizione $d\pi / dQ = 0$. Allo stesso modo, abbiamo visto nel Capitolo 12 che, per massimizzare i propri profitti, un monopolista deve scegliere il suo livello di *output* in modo da uguagliare ricavi e costi marginali. Anche in questo caso, la variabile dipendente è data dai profitti (π), ovvero dalla differenza fra il ricavo totale dell'impresa, $R(Q)$, e il costo totale di produzione $C(Q)$. In termini matematici, possiamo quindi scrivere che la funzione obiettivo del monopolista è:

$$\pi = R(Q) - C(Q)$$

Per poter massimizzare i propri profitti, il monopolista deve individuare il livello di produzione Q in corrispondenza del quale la curva del profitto ha inclinazione pari a zero (si veda la Figura 11.2). In termini algebrici, l'impresa sceglie di produrre quella quantità Q per cui $d\pi / dQ = 0$. La derivata di π è:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC}{dQ}$$

Tale derivata corrisponde quindi alla differenza tra il ricavo marginale (dR / dQ) ed il costo marginale di produzione (dC / dQ). Di conseguenza, il monopolista sceglierà Q in modo da rendere uguali ricavi e costi marginali; produrrà quindi in modo da verificare la condizione $d\pi / dQ = 0$ e questo gli consentirà di ottenere il massimo profitto possibile.

A.6 FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Fino a questo punto abbiamo considerato unicamente funzioni che dipendevano da una sola variabile. Tuttavia, in molte situazioni, la variabile dipendente risulta legata a due o più variabili indipendenti. Tanto per fare un esempio, i profitti complessivi di un'impresa (denotati sempre con π) possono dipendere da due diverse quantità di *output*, se l'impresa produce due beni diversi: denotiamo con Q_1 la quantità prodotta del primo bene e con Q_2 la quantità prodotta del secondo. Supponiamo che la funzione dei profitti dell'impresa in questione sia la seguente:

$$\pi = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1 Q_2 + 8Q_2 - 2(Q_2)^2 \quad \text{(A.10)}$$

La Figura A.8 mostra il grafico relativo a questa funzione. Il grafico è in tre dimensioni dal momento che vi sono tre variabili da considerare: la variabile dipendente, ovvero il profitto, è indicata sull'asse verticale, mentre le due variabili indipendenti, Q_1 e Q_2, sono misurate lungo gli altri due assi. Come mostra il grafico, la funzione dei profitti può essere rappresentata come una sorta di "collina". L'impresa può massimizzare i suoi profitti nel punto *A*, producendo $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 3$; tale combinazione le garantisce un profitto complessivo pari a $\pi = 38$.
Vediamo come è possibile utilizzare il calcolo per individuare i valori delle variabili indipendenti (Q_1 e Q_2 in questo caso) che massimizzano la variabile dipendente (π). Per fare ciò, occorre capire *come ciascuna delle variabili indipendenti influenza la variabile dipendente*, *mantenendo costante il livello di tutte le altre variabili indipendenti.*
Consideriamo allora il punto *B* del grafico, dove $Q_1 = 4$, $Q_2 = 2$ e $\pi = 36$. Come si evince dal disegno, questa non è certamente la combinazione degli *output* che massimizza il profitto. Trovandosi in questo punto, l'impresa può quindi chiedersi in che modo un incremento di Q_2 possa influenzare π, considerando fisso il valore dell'altra variabile indipendente Q_1. Per ottenere questa informazione, calcoliamo la *derivata parziale di* π *rispetto a* Q_2, denotata con $\partial\pi / \partial Q_2$. Per calcolare tale derivata, consideriamo la derivata dell'Equazione (A.10) assumendo però il livello di Q_1 come una costante.
Quando facciamo ciò, i primi due termini dell'Equazione (A.10) diventano costanti, dal momento che essi dipendono esclusivamente da Q_1; la derivata parziale d questi due termini rispetto a Q_2 è pertanto pari a zero. La derivata parziale del terzo termine (Q_1Q_2) rispetto a Q_2 è invece Q_1. Se consideriamo, infine, la derivata parziale degli ultimi due termini $[8Q_2 - 2(Q_2)^2]$ rispetto a Q_2, otteniamo invece $8 - 4Q_2$. Mettendo insieme tute queste informazioni, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_2} = Q_1 + 8 - 4Q_2 \quad \text{(A.11)}$$

L'Equazione (A.11) fornisce una misura del profitto marginale (quello che viene, talvolta, definito attraverso l'espressione "profittabilità marginale") di Q_2. Tale valore rappresenta il saggio al quale varia il profitto complessivo nel momento in cui si varia Q_2 e si mantiene costante Q_1.

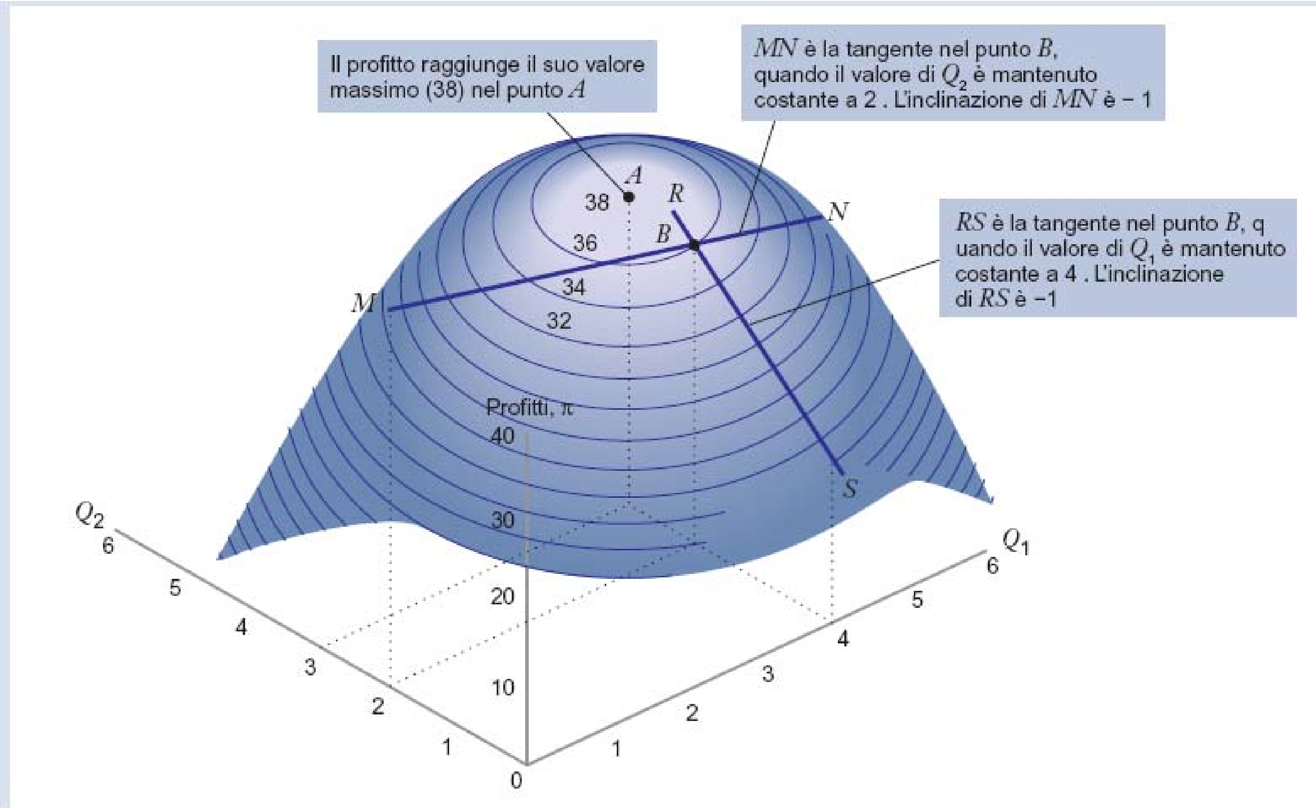


FIGURA A.8 Massimizzare una funzione a due variabili
Una funzione raggiunge il suo massimo quando l'inclinazione della curva che la rappresenta è pari a zero. Nel punto *A*, quando $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 3$, la funzione del profitto raggiunge il suo valore massimo (38). L'inclinazione della "collina" del profitto è zero in tutte le direzioni (e, equivalentemente, i valori delle derivate parziali $\partial\pi / \partial Q_1$ e $\partial\pi / \partial Q_2$ sono entrambi zero nel punto *A*). Nel punto *B*, quando $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 2$, la funzione del profitto raggiunge un valore più basso (36). L'inclinazione della "collina" del profitto non è quindi pari a zero in tutte le direzioni: in *B*, infatti, $\partial\pi/\partial Q_2 = +4$. Questo significa che l'inclinazione della "collina" a fronte di un aumento di Q_2 (mantenendo però sempre $Q_1 = 4$) è pari a 4. Questa è anche l'inclinazione della retta tangente *RS*. In *B*, inoltre, $\partial\pi/\partial Q_1 = -1$. Questo significa che l'inclinazione della "collina" a fronte di un aumento di Q_1 (mantenendo però sempre $Q_2 = 2$) è pari a -1. Questa è anche l'inclinazione della retta tangente *MN*.

In altri termini, il profitto marginale misura la pendenza della "collina" del profitto. Consideriamo infatti la Figura A.8. La retta che abbiamo chiamato *RS* è la tangente alla "colina" nel punto *B*; muovendosi lungo tale retta, Q_1 rimane sempre costante ($Q_1 = 4$). Possiamo determinare l'inclinazione della retta *RS* calcolando la derivata parziale $\partial\pi / \partial Q_2 = Q_1 + 8 - 4Q_2$ in corrispondenza dei valori $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 2$. Il valore che ne risulta è quindi: $\partial\pi / \partial Q_2 = (4) + 8 - 4(2) = 4$. L'inclinazione di *RS* (e quindi l'inclinazione della "collina" del profitto in corrispondenza del punto *B* e nella direzione di un aumento di Q_2) è pertanto pari a 4.

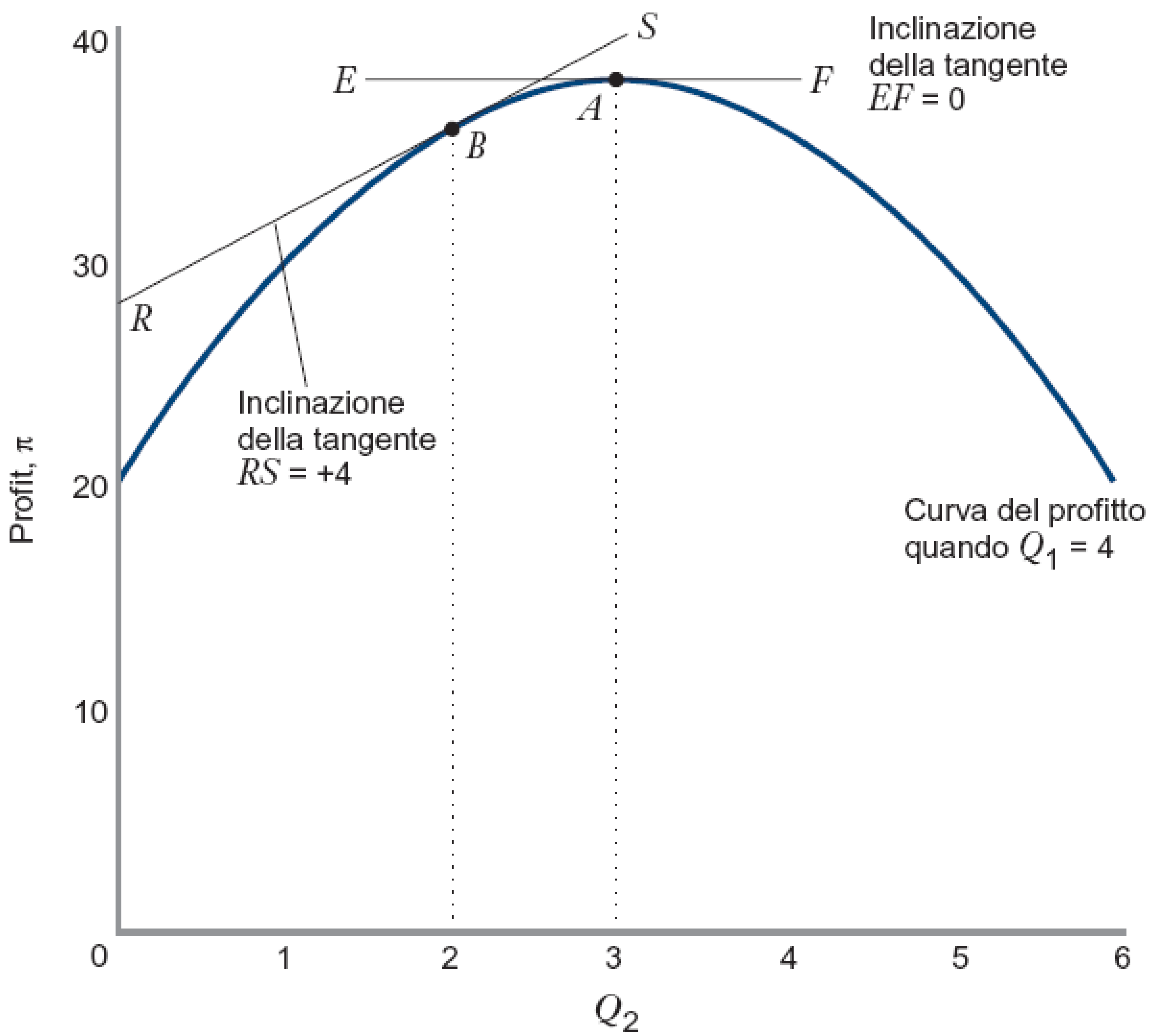


FIGURA A.9 Come illustrare la derivata parziale
Il grafico mostra una sezione della "collina " dei profitti rappresentata nella Figura A.8. Abbiamo rappresentato questa sezione per mostrare come appare la "collina" quando si fa variare Q_2 ma si mantiene costante Q_1 (in questo caso, $Q_1 = 4$). Il punto *B* di questa Figura corrisponde quindi al punto *B* della Figura A.8. Abbiamo inoltre tracciato la retta tangente alla "collina" dei profitti nel punto *B*. Il valore della derivata parziale dei profitti rispetto a Q_2 (denotata con $\partial\pi / \partial Q_2$) misura l'inclinazione di questa tangente. Nel punto *A*, $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 3$ ed i profitti raggiungono il valore massimo. Il punto *A* di questa figura corrisponde al punto *A* della Figura A.8. Siccome abbiamo raggiunto la sommità della "collina" dei profitti, l'inclinazione di tale "collina" nel punto considerato è pari a zero 0. Ne consegue che: $\partial\pi / \partial Q_2 = 0$.

Per provare a rendere ancora più chiaro il significato della derivata parziale, consideriamo una diversa rappresentazione della funzione del profitto, facendo riferimento alla Figura A.9. All'interno di questo grafico è stata riportata una sezione della "collina" dei profitti, che mostra come appare tale "collina" nel momento in cui facciamo variare Q_2 mantenendo però costante Q_1 (assumiamo sempre $Q_1 = 4$). Il punto *B* di questa figura corrisponde perciò esattamente al punto *B* della Figura A.8. Anche in questo grafico abbiamo tracciato la retta *RS,* tangente alla curva dei profitti proprio nel punto *B*. (La retta tangente *RS* è, ovviamente, la stessa della Figura A.8.) La derivata parziale dei profitti rispetto a Q_2 (denotata con $\partial\pi / \partial Q_2$) misura l'inclinazione della retta tangente [3], che, in corrispondenza del punto *B*, è pari a 4.

---

3 Un modo alternativo per cogliere il significato della derivate parziale illustrato nella Figura A.9 è quello di sostituire $Q_1 = 4$ all'interno della funzione dei profitti: $\pi = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1Q_2 + 8\ Q_2 - 2\ (Q_2)^2$. I profitti diventano quindi $\pi = 20 + 12\ Q_2 - 2(Q_2)^2$. Quella appena scritta è l'equazione relativa alla curva dei profitti rappresentata nella Figure A.9, in cui si è assunto che Q1 sia costante e, in particolare, sia uguale a 4. L'inclinazione di tale curva è data da: $d\pi / dQ_2 = 12 - 4\ Q_2$. Nel punto B, in cui $Q_2 = 2$, troviamo allora che $d\pi / dQ_2 = 4$ e questa è l'inclinazione della retta tangente nel punto, ovvero della retta RS.

In maniera analoga, potremmo essere interessati a capire come un incremento di Q_1 possa modificare il valore di π, mantenendo costante, questa volta, l'altra variabile indipendente, ovvero Q_2. Per ottenere l'informazione desiderata, occorre calcolare la derivata parziale di π rispetto a Q_1, denotata con $\partial\pi / \partial Q_1$. Calcoliamo quindi la derivata dell'Equazione (A.10), assumendo Q_2 come costante: gli ultimi due termini dell'Equazione (A.10) dovranno quindi essere considerati come delle costanti, dal momento che dipendono unicamente da Q_2. La derivata parziale di questi termini rispetto a Q_1 è pertanto zero. La derivata parziale del terzo termine (Q_1Q_2) rispetto a Q_1 è invece Q_2, mentre la derivata parziale rispetto a Q_1 dei primi due termini risulta essere $13 - 4Q_1$. Mettendo insieme tali informazioni, possiamo allora concludere che, in questo caso:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = 13 - 4Q_1 + Q_2 \qquad \text{(A.12)}$$

L'Equazione (A.12) fornisce una misura del profitto marginale di Q_1, ovvero del tasso al quale varia il profitto complessivo a fronte di una variazione di Q_1, nell'ipotesi che Q_2 rimanga invece fisso. Calcoliamo ora il valore assunto dalla derivata parziale appena calcolata nel punto *B* della Figura A.8. Quando $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 2$, il profitto marginale di Q_1 è dato da: $\partial\pi / \partial Q_1 = 13 - 4(4) + 2 = -1$.
Tracciamo la retta tangente alla "collina" dei profitti nel punto *B*, mantenendo costante il valore di Q_2 (in questo caso, $Q_2 = 2$). In base ai calcoli appena fatti, l'inclinazione di tale retta (indicata con *MN*) è quindi pari a -1.

Individuare il massimo o il minimo

Come possiamo individuare il punto di massimo della "collina" dei profitti della Figura A.8? In corrispondenza del punto di massimo, l'inclinazione della "collina" deve risultare zero in qualsiasi direzione; questo significa che, nel punto di massimo, *tutte le derivate parziali della funzione devono essere pari a zero.* In riferimento al nostro esempio, dobbiamo quindi verificare in quale punto sia $\partial\pi / \partial Q_1$ che $\partial\pi / \partial Q_2$ risultano essere nulle:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = 13 - 4Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_2} = Q_1 + 8 - 4Q_2 = 0$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni, troviamo che $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 3$. Quando queste sono le quantità prodotte dei due beni, l'impresa si colloca sulla sommità della "collina" dei profitti, rappresentata dal punto *A* della Figura A.8.[4]
Consideriamo ora il punto *A* della Figura A.9, in cui $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 3$ ed in corrispondenza del quale il profitto dell'impresa risulta essere massimo. Il punto *A* di questa figura coincide con il punto *A* della Figura A.8: dal momento che abbiamo raggiunto il massimo della curva dei profitti, l'inclinazione della curva in quel punto dovrà risultare pari a zero. Di conseguenza, nel punto *A* la derivata parziale $\partial\pi / \partial Q_2$ si annulla.
Per fare pratica con le derivate parziali, può essere utile provare a risolvere i seguenti esercizi.

Utilità marginale con due variabili indipendenti

Data la funzione di utilità $U = \sqrt{xy}$, la variabile dipendente è rappresentata da *U* mentre le variabili indipendenti sono due, ovvero *x* e *y*. Le utilità marginali corrispondenti sono, rispettivamente, $MU_x = \sqrt{y} / (2\sqrt{x})$ e $MU_y = \sqrt{x} / (2\sqrt{y})$.

Problema: attraverso il calcolo delle derivate parziali, verifica che le espressioni scritte per le utilità marginali siano effettivamente corrette.

Soluzione: può essere utile riscrivere la funzione di utilità come $U = x^{1/2} y^{1/2}$. L'utilità marginale di *x* è la derivata di *U* rispetto a *x*, vale a dire $\partial U / \partial x$. Per calcolare tale derivata, consideriamo *y* come una costante. Dobbiamo quindi limitarci a calcolare la derivata del termine compreso fra parentesi: $U = [x^{1/2}]\, y^{1/2}$. (Il termine $y^{1/2}$ rappresenta ora una semplice costante moltiplicativa.) La funzione $x^{1/2}$ è una potenza e la sua derivata è pertanto: $(1/2)x^{-1/2}$, che equivale a scrivere $1/(2\sqrt{x})$. L'utilità marginale di *x* è quindi $MU_x = \sqrt{y} / (2\sqrt{x})$.
In modo del tutto simile, verifichiamo l'espressione per l'utilità marginale di *y* calcolando la derivata parziale di *U* rispetto a *y*, ovvero $\partial U/\partial y$. In questo caso, è la variabile *x* a dover essere considerata come fissa e l'unica derivata che dobbiamo calcolare è quella del termine compreso fra parentesi: $U = x^{1/2}\, [y^{1/2}]$. La funzione $y^{1/2}$ è una potenza e la sua derivata è quindi: $(1/2)\, y^{-1/2}$ oppure, scritta in altra forma, $1/(2\sqrt{y})$. L'utilità marginale di *y* corrisponde quindi a $MU_y = \sqrt{x} / (2\sqrt{y})$.

4 Per essere sicuri di essere in un punto di massimo (o comunque per poter distinguere fra un massimo ed un minimo) dovremmo esaminare le condizioni del secondo ordine per l'ottimizzazione. In questa Appendice non tratteremo tali condizioni nel caso di funzioni a più variabili; per approfondire la questione, rimandiamo dunque a un qualsiasi testo di base di analisi matematica. Bisogna inoltre ricordare che le tecniche illustrate in questa Appendice consentono di individuare il punto in cui la funzione ha un massimo o un minimo, ma non consentono di distinguere tra punti di massimo e minimo globali o locali (si riveda, a tal proposito, la nota a piè di pagina numero 2).