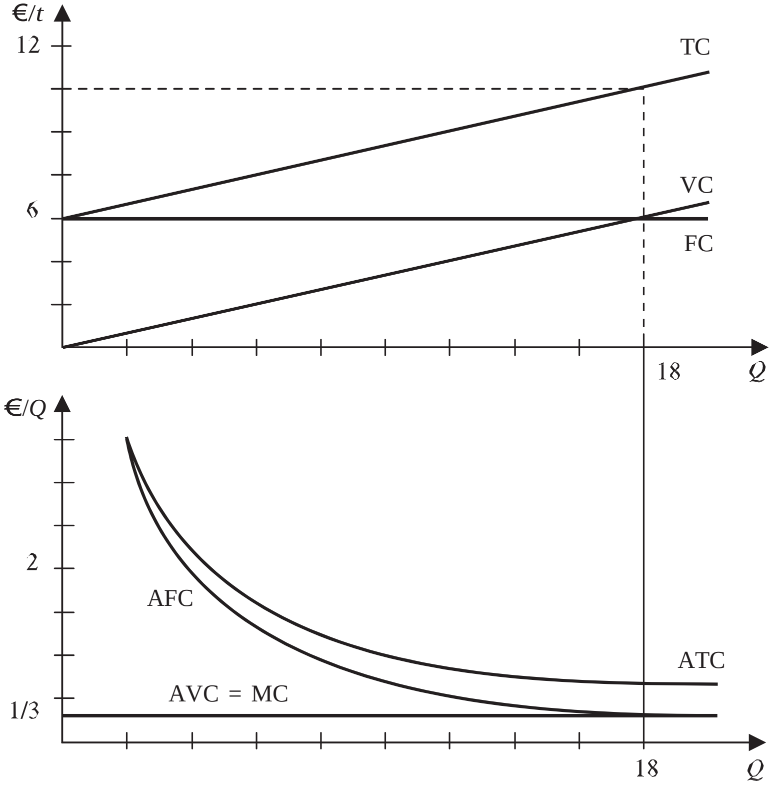
Capitolo 10
Soluzioni ai problemi

1.

Unità di output	Costo totale	Costo fisso	Costo variabile	ATC	AVC	AFC	MC
0	24	24	0	—	—	—	—
1	40	24	16	40	16	24	16
2	74	24	50	37	25	12	34
3	108	24	84	36	28	8	34
4	160	24	136	40	34	6	52
5	220	24	196	44	39,2	4,8	60
6	282	24	258	47	43	4	62

2. Si vedano le figure qui sotto.

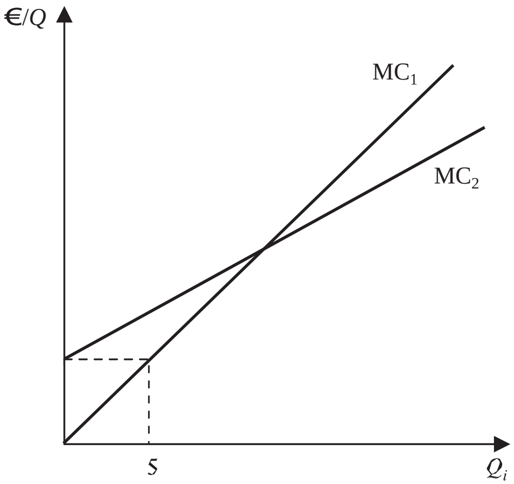


Con K fissato a 2, avremo $Q = 6L$, che si risolve per $L = Q/6$ (si vedano le figure qui sopra). Pertanto avremo:

VC = $wL = wQ/6 = Q/3$;	AVC = 1/3;
FC = $3K$ = 6;	AFC = $6/Q$;
TC = $6 + Q/3$;	ATC = $6/Q + 1/3$;
MC = 1/3.	

3. Quando MP = AP, il costo marginale e il costo medio variabile saranno uguali. Lo si può dedurre dal fatto che MC = $\Delta VC/\Delta Q = w\Delta L/\Delta Q = w/MP$. Analoga- mente, AVC = $wL/Q = w/AP$. Pertanto, quando AP = MP, anche MC deve esse- re = AVC.

4. *a*) L'impresa minimizza i costi quando distribuisce la sua produzione tra i suoi due processi produttivi in modo che il costo marginale sia uguale in entrambi (si veda la figura qui sotto).



Se Q_1 indica la produzione nel primo processo e Q_2 la produzione nel secondo, avremo:

$Q_1 + Q_2 =$

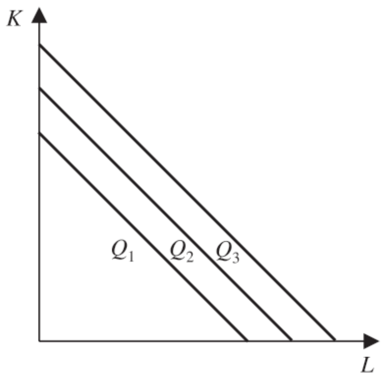
8 e:

$0{,}4Q_1 = 2 + 0{,}2Q_2$,

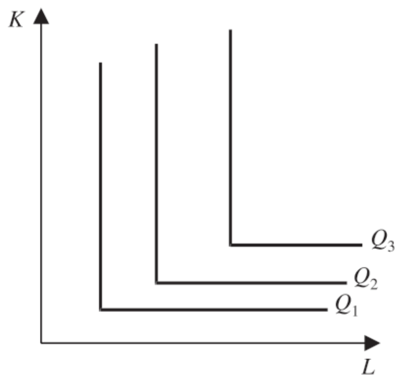
che dà $Q_1 = 6$, $Q_2 = 2$. Il valore comune del costo marginale sarà 2,4.

b) Si osservi che per livelli produttivi inferiori a 5 è sempre meno costoso produrre tutte le unità con il primo processo.

5. Se K e L sono sostituti perfetti, per ogni dato isocosto verrà usato uno solo degli input. Indipendentemente dall'inclinazione dell'isocosto, avremo sempre una soluzione d'angolo (eccetto quando l'inclinazione dell'isocosto è uguale a quella dell'isoquanto) (si veda la figura qui sotto).

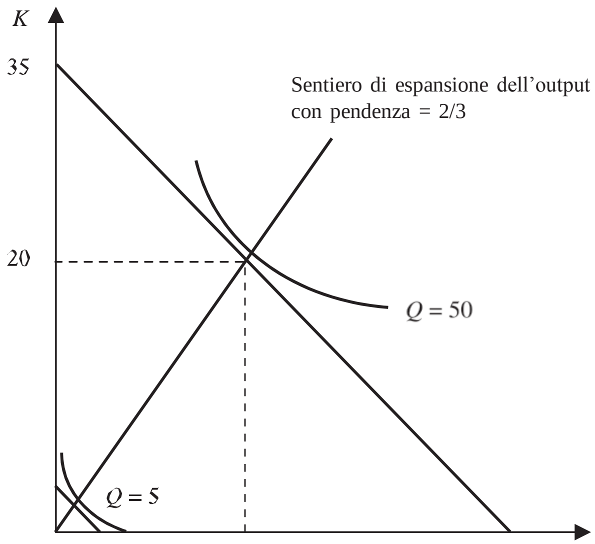


6. Se K e L sono perfettamente complementari, i due input saranno usati in proporzioni fisse, indipendentemente dall'inclinazione dell'isocosto (si veda la figura qui sotto).



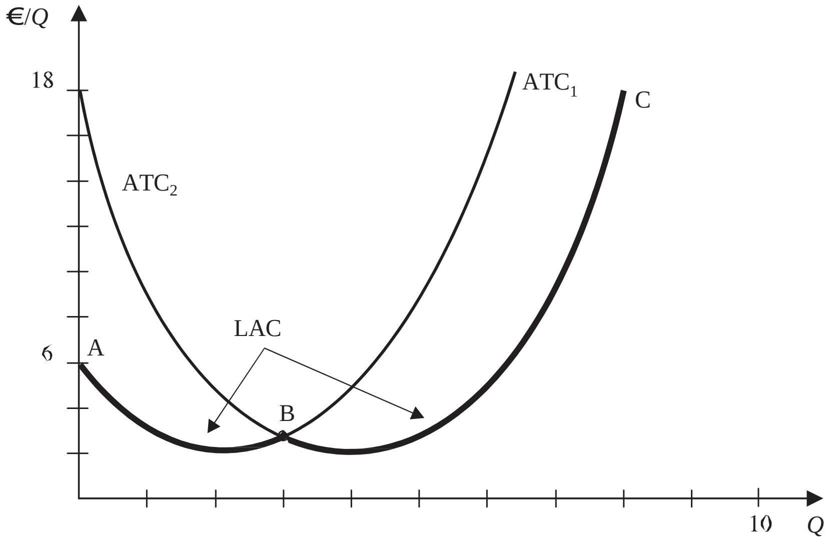
7. La condizione necessaria per minimizzare i costi è $MP_K/P_K = MP_L/P_L$. In questo caso $MP_K/P_K = 2$ e $MP_L/P_L = 4{,}5$. Dato che questa impresa ottiene una produzione maggiore dall'ultimo euro speso per acquistare lavoro che non dall'ultimo euro speso per acquistare capitale, dovrebbe acquistare meno capitale e più lavo- ro finché il rapporto MP_L/MP_K non sia lo stesso per entrambi gli input.

8. Per questa funzione di produzione, finché il rapporto tra i prezzi degli input (P_K/P_L) rimane fisso a 2:1, la combinazione ottimale degli input sarà sempre 2 unità di capitale ogni 3 unità di lavoro, ossia $K = 2L/3$. Per un costo totale pari a 70, avremo pertanto $P_K K + P_L L = 2(2L/3) + L = 70$, che si risolve per $L = 30$ e $K = 20$ (si veda il grafico qui sotto).

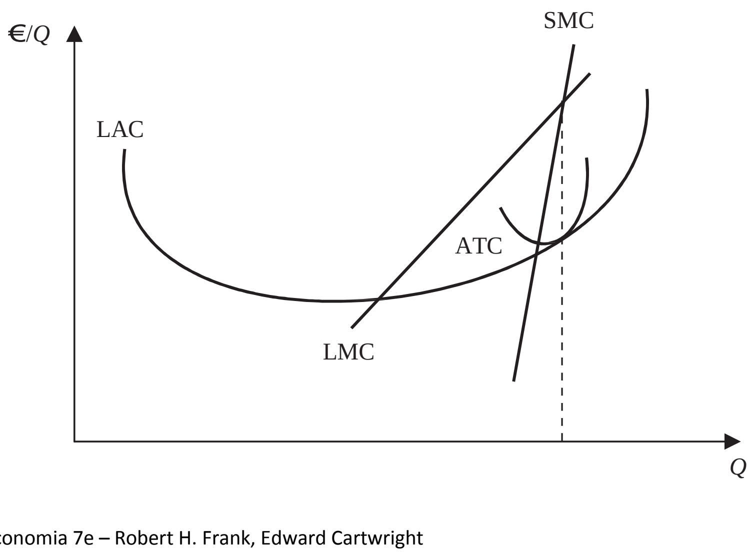


9. Con la combinazione di input che minimizza i costi per produrre Q^*, sappiamo che l'output addizionale ottenuto dall'ultimo euro speso per acquistare lavoro è lo stesso che si ottiene dall'ultimo euro speso per acquistare capitale. Quindi le due curve del costo marginale di breve periodo assumeranno lo stesso valore in corrispondenza di Q^*.

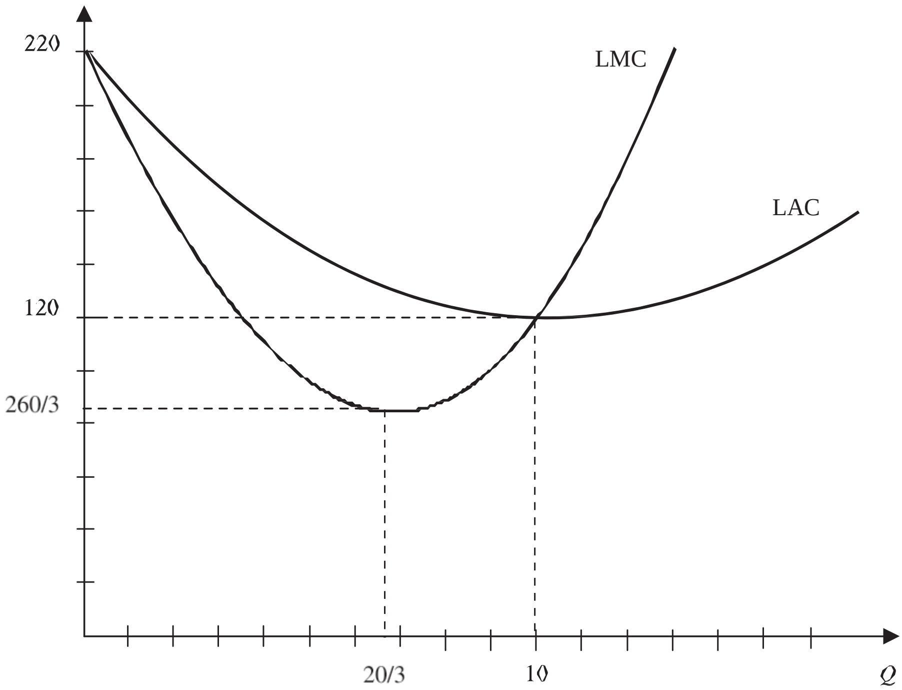
10. La curva LAC è l'inviluppo delle due curve ATC dell'impresa, che nella figura qui sotto è rappresentato da *ABC*.



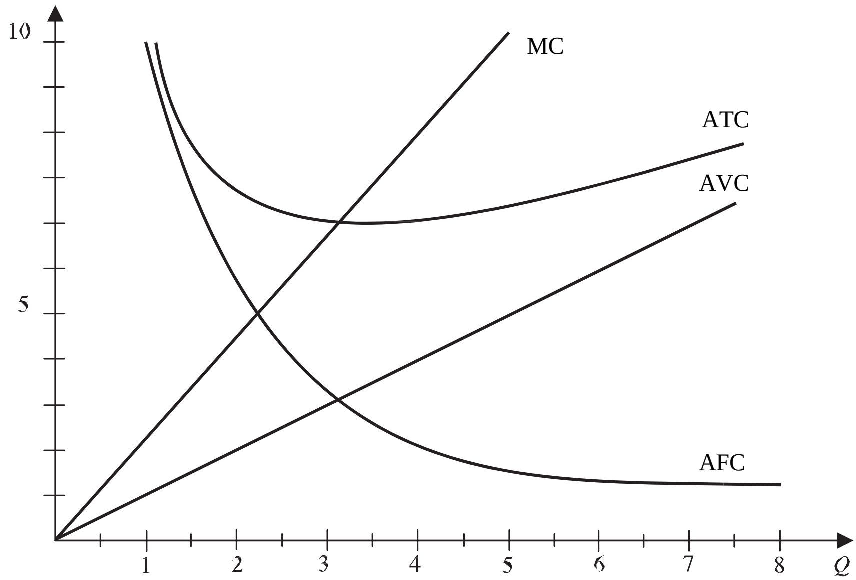
11. Le curve LMC e SMC coincidono al livello di output per cui LAC e ATC sono uguali. Se LMC ≠ SMC, segue che ATC > LAC dato che LAC non può mai esse- re maggiore di ATC (si veda la figura qui sotto).



12. LAC = LTC/Q = $Q^2 - 20Q + 220$
LMC = dLTC/dQ = $3Q^2 - 40Q + 220$ (si veda la figura qui sotto).



13. $ATC = LTC/Q = Q + 10/Q$
    $AVC = Q$
    $AFC = 10/Q$
    $MC = dLTC/dQ = 2Q$ (si veda la figura qui sotto).



14.
Si ricordi che il costo totale di lungo periodo si può esprimere come $LTC(Q)=rK(Q)+wL(Q)$ dove r e w rappresentano i costi unitari, rispettivamente, del capitale e del lavoro in funzione dell'output.

a)

K	L	Q	LTC(Q)
1	1	1	2
2	2	1,74	4
3	3	2,41	6

b) Occorre determinate quale è la combinazione ottimale dei due input necessaria per produrre il livello dato dell'output. Per produrre 2 unità di output, la combinazione ottimale degli input la si ottiene risolvendo il sistema composto: 1) dall'equazione che rappresenta l'eguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione tecnica, $MRTS=K/L$, ed il prezzo relativo dei fattori che nel nostro caso è pari ad uno; 2) dalla funzione di produzione posta pari all'output da realizzare, $K^{0,4}L^{0,4}=Q_0$ dove $Q_0=2$ o $Q_0=3$.

Q	K	L	LTC(Q)
1	1	1	2
2	2,38	2,38	4,76
3	3,95	3,95	7,90

c) Dal confronto tra le due tabelle si evince che i rendimenti di scala della funzione di produzione sono decrescenti e che i costi di lungo periodo crescono più che proporzionalmente al crescere dell'output (si veda la Figura 10.17 del libro).

15.
a) Il MRTS è pari a $(L/K)^{0,5}$, mentre il rapporto tra i prezzi dei fattori è 1. Occorre risolvere il sistema seguente:

$Q=K^{0,5}+L^{0,5}$

$(L/K)^{0,5}=1$

Dalla seconda equazione si ricava L=K che, sostituita nella prima equazione, ci consente di ottenere $K(Q)=0,25Q^2$ e $L(Q)=0,25Q^2$. Di conseguenza, il costo totale di lungo periodo è:

$LTC(Q)=rK(Q)+wL(Q)=(1)\cdot 0,25Q^2+(1)\ 0,25Q^2=0,5Q^2$

Il costo medio ed il costo marginale sono pari a:

$LAC(Q)=LTC(Q)/Q=0,5Q$

$LMC(Q)=dLTC(Q)/dQ=Q$

b) Se il capitale è pari ad 1, allora la funzione di produzione di breve periodo diventa $Q(K=1)=1^{0,5}+L^{0,5}$, dalla quale si ricava $L(Q)=(Q-1)^2$. Quindi il costo totale di breve periodo è: $TC(Q)=rK+wL(Q)=$

$(1)\cdot 1+(1)\cdot(Q-1)^2=Q^2-2Q+1$

c) Le funzioni di costo medio totale, di costo medio variabile e di costo marginale sono pari a: $ATC(Q)=TC(Q)/Q=$

$Q-2+1/Q$

$AVC(Q)=VC(Q)/Q=Q-2$

$MC(Q)=dTC(Q)/dQ=2Q-2$.

16.
a) I rendimenti di scala sono costanti, infatti la somma degli esponenti dei tre fattori produttivi è esattamente pari ad uno.
b) La produttività marginale dei singoli fattori produttivi è decrescente, infatti:

$$\partial Q/\partial K = MP_K = 0{,}5K^{-0{,}5}L^{0{,}25}X^{0{,}25} > 0 \quad \partial^2 Q/\partial K^2 = \partial MP_K/\partial K = -0{,}25K^{-1{,}5}L^{0{,}25}X^{0{,}25} < 0$$

Analogamente:

$$\partial Q/\partial L = MP_L = 0{,}25K^{0{,}5}L^{-0{,}75}X^{0{,}25} > 0 \quad \partial^2 Q/\partial L^2 = \partial MP_L/\partial L = -(3/16)K^{0{,}5}L^{-(7/4)}X^{0{,}25} < 0$$

$$\partial Q/\partial X = MP_X = 0{,}25K^{0{,}5}L^{0{,}25}X^{-0{,}75} > 0 \quad \partial^2 Q/\partial X^2 = \partial MP_L/\partial X = -(3/16)K^{0{,}5}L^{0{,}25}\ X^{-(7/4)} < 0$$

c) Il MRTS tra lavoro e capitale è:

$$MRTS_{LK} = MP_L/MP_K = K/2L$$

Mentre il MRTS tra *kwow-how* e lavoro è:

$$MRTS_{XL} = MP_X/MP_L = L/X$$

d) Con X=256 la funzione di produzione diviene $Q=K^{0{,}5}L^{0{,}25}256^{0{,}25}=4K^{0{,}5}L^{0{,}25}$. Di conseguenza, il problema dell'ottima combinazione fattoriale per la produzione di 96 unità di output è la soluzione del sistema:

$$96=4K^{0{,}5}L^{0{,}25}$$
$$MRTS_{LK}=P_L/P_K$$

dal quale, dopo alcuni passaggi, si ottiene $K^*\approx 43{,}61$ e $L^*\approx 174{,}44$.
e) $TC(Q=96)=P_KK^*+P_LL^*+P_L256=(8)\ 43{,}61+(1)174{,}44+(2)256=1035{,}32$

17.
a) I rendimenti di scala sono crescenti, infatti la somma degli esponenti dei due fattori produttivi è maggiore di uno.
b) I MRTS è uguale a K/L. Risolvendo il sistema:

$$80=2K+4L$$
$$K/L=2$$

si ottiene $K^*=20$ e $L^*=10$.
c) La combinazione ottimale dei fattori risolve il seguente sistema:

$$K/L=2$$
$$4000=20KL$$

da cui si trae ancora una volta $K^*=20$ e $L^*=10$.
d) In generale, il costo totale di produzione di lungo periodo in funzione dell'output si ottiene risolvendo il sistema:

$$K/L=2$$
$$Q=20KL$$

per K ed L rispetto a Q. In questo caso, dopo alcuni passaggi algebrici, si ricava:

$$L(Q)=(Q/40)^{0{,}5}$$
$$K(Q)=2(Q/40)^{0{,}5}$$

per cui $TC(Q)=P_KK(Q)+P_LL(Q)=(2)2(Q/40)^{0{,}5}+(4)(Q/40)^{0{,}5}=8(Q/40)^{0{,}5}$

e) $TC(Q=4000)=8(4000/40)^{0{,}5}=80$.

18.
a) Il MRTS è uguale a $(K\text{-}8)/L$. Risolvendo il sistema:

$$2401=10(K-8)^2L^2$$
$$(K-8)/L=P_L/P_K$$

si ottiene $K(P_L/P_K)=8+7(P_L/P_K)^{0{,}5}$ e $L(P_L/P_K)=7/(P_L/P_K)^{0{,}5}$, che rappresentano le funzioni di domanda dei fattori produttivi.
b) Si può agevolmente verificare che $K^*=29$ e $L^*=7/3$.