Características

Entradas de capítulo

Cada capítulo abre con una aplicación a la vida real de los conceptos presentados en el capítulo, ilustrada con una fotografía. Las preguntas abiertas y reflexiones sobre la aplicación motivan que el estudiante considere cómo los conceptos de cálculo se relacionan con las situaciones de la vida real. Un resumen breve con un componente gráfico resalta los conceptos matemáticos presentados en el capítulo y explica por qué son importantes.

5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

$\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln 1 = 0$

$\int_1^{3/2} \frac{1}{t}\,dt = \ln \frac{3}{2} \approx 0.41$

$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \ln 2 \approx 0.69$

$\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \ln 3 \approx 1.10$

Un géiser es un chorro de agua caliente que hace erupción periódicamente cuando el agua almacenada en la tierra dentro de un espacio hierve y produce vapor. Las fuerzas del vapor impulsan hacia arriba el agua a través de una abertura en la tierra. La temperatura a la cual el agua hierve es afectada por la presión. ¿Se puede pensar que un incremento o decremento en la presión causa que el agua hierva a una temperatura baja? ¿Por qué?

En el capítulo 5, veremos que la función $f(x) = 1/x$ puede usarse para definir la función logaritmo natural. Esto se realiza considerando la integral definida

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Cuando $x < 1$, el valor de esta integral definida es negativo. Cuando $x = 1$, el valor es 0. Cuando $x > 1$, el valor es positivo.

Brian Maslyar/Index Stock

321

Objetivos de estudio

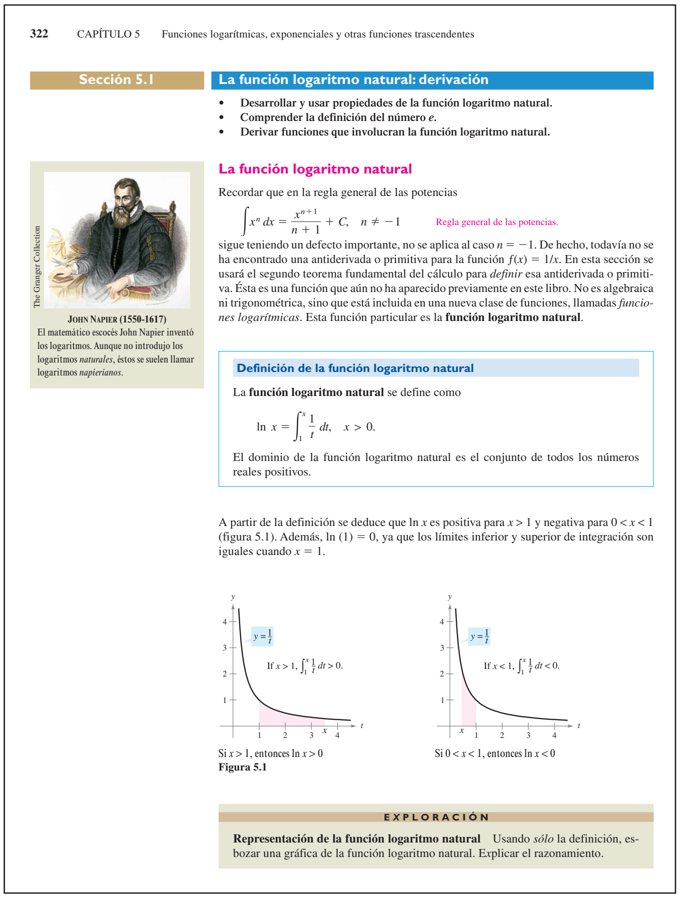
Cada sección empieza con una guía de habilidades a desarrollar a partir de los conceptos importantes cubiertos en la sección. Esto sirve para que el profesor prepare su clase y como una guía de estudio y revisión para el estudiante.

Exploraciones

Las exploraciones para los temas seleccionados, ofrecen la oportunidad para descubrir los conceptos de cálculo antes de que se presentan formalmente en el texto, reforzando así la comprensión del estudiante. Esta sección optativa puede omitirse a discreción del profesor sin la pérdida de continuidad en la cobertura del material.

Notas históricas

Integradas a lo largo del texto, ayudan a los estudiantes a comprender los fundamentos matemáticos del cálculo.



322 CAPÍTULO 5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

Sección 5.1 **La función logaritmo natural: derivación**

- Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.
- Comprender la definición del número *e*.
- Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.

The Granger Collection

JOHN NAPIER (1550-1617)
El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Aunque no introdujo los logaritmos *naturales*, éstos se suelen llamar logaritmos *napierianos*.

La función logaritmo natural

Recordar que en la regla general de las potencias

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla general de las potencias.}$$

sigue teniendo un defecto importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que aún no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

Definición de la función logaritmo natural

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

A partir de la definición se deduce que $\ln x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.

$y = \frac{1}{t}$ If $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0$.

Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$

$y = \frac{1}{t}$ If $x < 1$, $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt < 0$.

Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

Figura 5.1

EXPLORACIÓN

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición, esbozar una gráfica de la función logaritmo natural. Explicar el razonamiento.

342 CAPÍTULO 5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

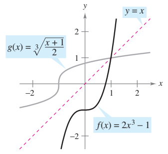
Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3-1)+1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).



f y *g* son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, compare las funciones f y g.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

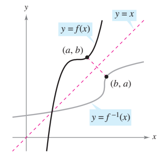
Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo en efecto se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la de $-f$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.

TEOREMA 5.6 Propiedad de reflexión de las funciones inversas

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).



La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

Demostración Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Así que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.

Teoremas

Se resaltan los teoremas y definiciones para dar énfasis y permitir una localización rápida. Se muestran las pruebas para los teoremas seleccionados para reforzar la comprensión del estudiante.

Ayudas de estudio

Estas ayudan permiten a los estudiantes evitar los errores comunes, los guían en casos especiales y amplían conceptos teóricos.

Gráficas

Las numerosas gráficas a lo largo del texto refuerzan la comprensión de los conceptos de cálculo complejos (sobre todo en las representaciones tridimensionales), así como en las aplicaciones de la vida real.

Ejemplos

Para garantizar la utilidad del texto como una herramienta de estudio y aprendizaje, la octava edición contiene numerosos ejemplos. Detallamos las soluciones de ejercicios (muchos de ellos con comentarios para aclarar los pasos o el método) se presentan gráfica, analítica y/o numéricamente para proporcionar oportunidades para la práctica y una visión amplia de los conceptos de cálculo. Muchos ejemplos incorporan el análisis de datos reales.

Notas

Las notas con instrucciones acompañan muchos de los teoremas, definiciones y ejemplos, para ofrecer una perspectiva adicional o puntualizar generalizaciones.

SECCIÓN 5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración 353

EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal estándar

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

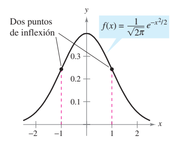
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se buscan los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} && \text{Función original.} \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2} && \text{Primera derivada.} \\ f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] && \text{Regla del producto.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2})(x^2 - 1) && \text{Segunda derivada.} \end{aligned}$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se puede aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.



La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Transacciones comerciales

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2002 puede ser modelado por

$$y = 36\,663e^{0.1902t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 1998? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo es

$$\begin{aligned} y' &= (0.1902)(36\,663)e^{0.1902t} \\ &\approx 6\,973e^{0.1902t}. \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada cuando $t = 8$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 1998 era alrededor de

31 933 millones de transacciones por año.

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

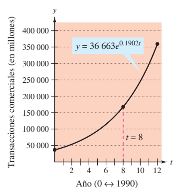
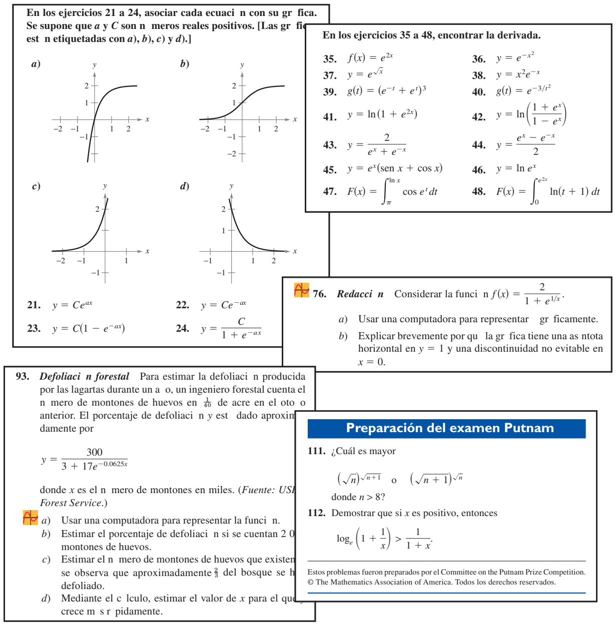


Figura 5.23

Ejercicios

El corazón de cualquier texto de cálculo; los ejercicios mantienen oportunidades de exploración, práctica y comprensión. La octava edición contiene cerca de 10 000 ejercicios de repaso, de sección y de capítulo, cuidadosamente elaborados para reflexionar y alcanzar el reto de estudio. El extenso rango de tipos de problemas incluye verdadero/falso, de escritura, conceptuales, de diseño real de datos y de análisis gráfico.



En los ejercicios 21 a 24, asociar cada ecuaci n con su gr fica. Se supone que *a* y *C* son n meros reales positivos. [Las gr fi est n etiquetadas con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) *b*) *c*) *d*)

21. $y = Ce^{ax}$ **22.** $y = Ce^{-ax}$

23. $y = C(1 - e^{-ax})$ **24.** $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

En los ejercicios 35 a 48, encontrar la derivada.

35. $f(x) = e^{2x}$ **36.** $y = e^{-x^2}$

37. $y = e^{\sqrt{x}}$ **38.** $y = x^2e^{-x}$

39. $g(t) = (e^{-t} + e^{t})^3$ **40.** $g(t) = e^{-3/t^2}$

41. $y = \ln(1 + e^{2x})$ **42.** $y = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

43. $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ **44.** $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

45. $y = e^x(\text{sen } x + \cos x)$ **46.** $y = \ln e^x$

47. $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t \, dt$ **48.** $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1) \, dt$

76. ***Redacci n*** Considerar la funci n $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$.

a) Usar una computadora para representar gr ficamente.

b) Explicar brevemente por qu la gr fica tiene una as ntota horizontal en $y = 1$ y una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

93. ***Defoliaci n forestal*** Para estimar la defoliaci n producida por las lagartas durante un a o, un ingeniero forestal cuenta el n mero de montones de huevos en $\frac{1}{40}$ de acre en el oto o anterior. El porcentaje de defoliaci n y est dado aproxim damente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.0625x}}$$

donde x es el n mero de montones en miles. (*Fuente: USI Forest Service*.)

a) Usar una computadora para representar la funci n.

b) Estimar el porcentaje de defoliaci n si se cuentan 2 0 montones de huevos.

c) Estimar el n mero de montones de huevos que existen se observa que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del bosque se h defoliado.

d) Mediante el c lculo, estimar el valor de x para el que crece m s r pidamente.

Preparación del examen Putnam

111. ¿Cuál es mayor

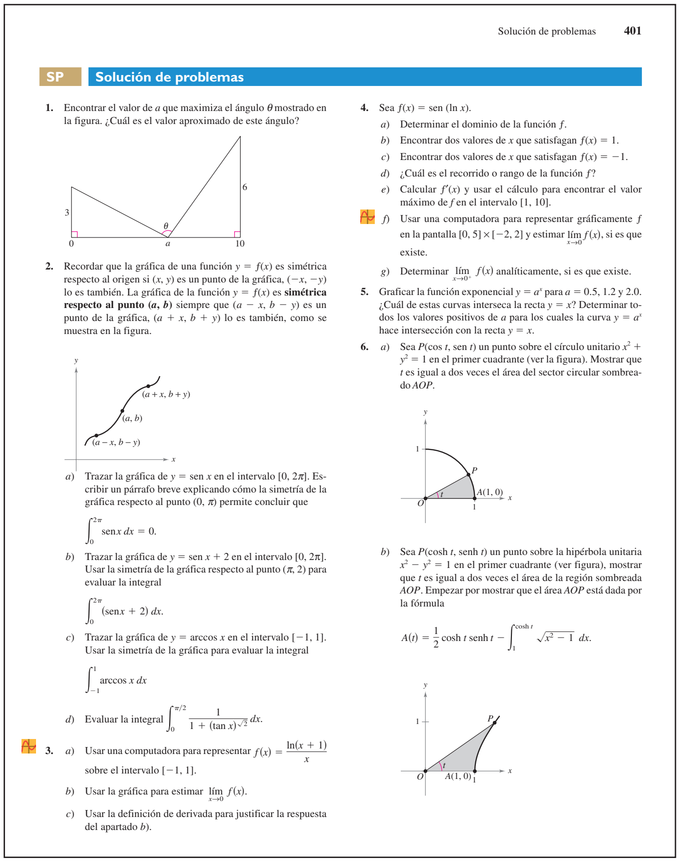
$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \quad \text{o} \quad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

112. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1 + x}.$$

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematics Association of America. Todos los derechos reservados.



Solución de problemas 401

SP Solución de problemas

1. Encontrar el valor de a que maximiza el ángulo θ mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor aproximado de este ángulo?

2. Recordar que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen si (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ lo es también. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** siempre que $(a - x, b - y)$ es un punto de la gráfica, $(a + x, b + y)$ lo es también, como se muestra en la figura.

a) Trazar la gráfica de $y = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Escribir un párrafo breve explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(0, \pi)$ permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen} x \, dx = 0.$$

b) Trazar la gráfica de $y = \text{sen } x + 2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Usar la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\text{sen} x + 2) \, dx.$$

c) Trazar la gráfica de $y = \text{arccos } x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usar la simetría de la gráfica para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \text{arccos } x \, dx$$

d) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} \, dx.$

3. *a*) Usar una computadora para representar $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Usar la gráfica para estimar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Usar la definición de derivada para justificar la respuesta del apartado *b*).

4. Sea $f(x) = \text{sen}(\ln x)$.

a) Determinar el dominio de la función f.

b) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = 1$.

c) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = -1$.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de la función f?

e) Calcular $f'(x)$ y usar el cálculo para encontrar el valor máximo de f en el intervalo $[1, 10]$.

f) Usar una computadora para representar gráficamente f en la pantalla $[0, 5] \times [-2, 2]$ y estimar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, si es que existe.

g) Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ analíticamente, si es que existe.

5. Graficar la función exponencial $y = a^x$ para $a = 0.5, 1.2$ y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determinar todos los valores positivos de a para los cuales la curva $y = a^x$ hace intersección con la recta $y = x$.

6. *a*) Sea $P(\cos t, \text{sen } t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP.

b) Sea $P(\cosh t, \text{senh } t)$ un punto sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver figura), mostrar que t es igual a dos veces el área de la región sombreada AOP. Empezar por mostrar que el área AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2}\cosh t \, \text{senh } t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$$

SP Solución de problemas

Cada capítulo concluye con un conjunto de ejercicios para pensar y proporcionan al estudiante oportunidades para explorar los conceptos más allá del capítulo.

Tecnología

A lo largo del texto el uso de una calculadora para elaborar gráficas o un sistema de cálculo algebraico se sugiere para la solución de problemas, así como para la exploración y el descubrimiento. Por ejemplo, los estudiantes pueden escoger calculadora para elaborar gráficas y para ejecutar los cálculos complicados, visualizar los conceptos teóricos, descubrir los enfoques alternativos o para verificar los resultados de otros métodos de solución. Sin embargo, no se exige a los estudiantes el acceso a este instrumento para usar con eficacia el texto. Además de describir los beneficios de usar la tecnología para aprender cálculo, el texto también muestra su posible uso incorrecto o interpretación equívoca.

Características adicionales

A lo largo del libro se integran recursos de aprendizaje, como la sección de proyectos de trabajo, las referencias a periódicos, y la sección de desarrollo de conceptos.