

Álgebra lineal

Stanley I. Grossman

Esta sexta edición de *Álgebra lineal* ofrece nuevas características, y conserva la estructura ya probada y clásica que tenía la quinta edición.

Los estudiantes aprenden matemáticas viendo ejemplos completos y claros. La sexta edición contiene cerca de 350 ejemplos, cada uno de los cuales incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución. En muchos casos se proporcionaron secciones de ayuda didáctica para facilitar el seguimiento de esos pasos. Adicionalmente, se otorgó un nombre a los ejemplos con el objeto de que resulte más sencillo entender el concepto esencial que ilustra cada uno.

El texto contiene cerca de 2750 ejercicios. Al igual que en todos los libros de matemáticas, éstos constituyen la herramienta más importante del aprendizaje.

Los problemas conservan un orden de acuerdo con su grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones. Los problemas más complicados se encuentran marcados con un asterisco (*) y unos cuantos excepcionalmente difíciles con dos (**). Éstos se complementan con ejercicios de problemas impares, incluyendo aquellos que requieren demostraciones. Muchos de ellos han sido aportados por profesores destacados en su impartición de la materia. También hay varios problemas en las secciones de “Manejo de calculadora” y “MATLAB”. En dicha sección se hablará más sobre estas características.

Una característica importante es la aparición frecuente del teorema de resumen, que une temas que en apariencia no tienen nada en común dentro del estudio de matrices y transformaciones lineales.

Los problemas de autoevaluación están diseñados para valorar si el estudiante comprende las ideas básicas de la sección, y es conveniente que se resuelvan antes de intentar los problemas más generales que les siguen. Casi todos ellos comienzan con preguntas de opción múltiple o falso-verdadero que requieren pocos o ningún cálculo. Las respuestas a estas preguntas aparecen dentro de la misma sección de problemas a la que pertenecen.

En la actualidad existen una gran variedad de calculadoras graficadoras disponibles, con las que es posible realizar operaciones con matrices y vectores. Desde la edición anterior el texto incluye secciones de “manejo de calculadora” que tienen por objeto ayudar a los estudiantes a usar sus calculadoras en este curso. Para esta edición se han actualizado estas secciones con uno de los modelos de vanguardia.

Cada sección comienza con una descripción detallada del uso de la Hewlett-Packard HP -50g para la resolución de problemas. Por lo general a estas descripciones les siguen una serie de problemas adicionales con números más complicados que se pueden resolver fácilmente con calculadora.

Sin embargo, debe hacerse hincapié en que *no se requiere que los alumnos cuenten con una calculadora graficadora para que el uso de este libro sea efectivo*. Las secciones de manejo de calculadora son una característica *opcional* que debe usarse a discreción del profesor.

Al final de cada capítulo aparece un repaso detallado de los resultados importantes hallados en el mismo. Incluye referencias a las páginas del capítulo en las que se encuentra la información completa.

Características nuevas de la sexta edición

Gracias a la participación de profesores y revisores, la nueva edición se ha enriquecido con diversos cambios, como son:

- Secciones de manejo de la calculadora actualizadas
- Las tutorías y problemas de MATLAB también se han actualizado, incluyendo ahora mayores referencias e incluso muchos de los códigos necesarios.
- Gran cantidad de problemas nuevos, además de otros actualizados, que permitirán ejercitar y aplicar las habilidades adquiridas. Por ende, la sección de respuestas al final del libro ha cambiado por completo.

MATLAB®,

El texto cuenta con más de 230 problemas opcionales para MATLAB®, muchos los cuales tienen varios incisos, que aparecen después de la mayoría de las secciones de problemas (MATLAB® es una marca registrada de The Math Works, Inc.). MATLAB® es un paquete poderoso pero amigable, diseñado para manejar problemas de una amplia variedad que requieren cálculos con matrices y conceptos de álgebra lineal. Se puede ver mayor información sobre este programa en la sección de apéndices. Los problemas relacionados directamente con los

ejemplos y los problemas normales, exhortan al estudiante a explotar el poder de cálculo de MATLAB® y explorar los principios del álgebra lineal mediante el análisis y la obtención de conclusiones. Además, se cuenta con varios incisos de “papel y lápiz” que permiten que el alumno ejercite su juicio y demuestre su aprendizaje de los conceptos.

La sección 1.3 es la primera que contiene problemas de MATLAB®, antes de estos problemas se presenta una introducción y una tutoría breve. Los problemas de MATLAB® en cada sección están diseñados para que el usuario conozca los comandos de MATLAB® a medida que se van requiriendo para la resolución de problemas. Se cuenta con numerosas aplicaciones y problemas proyecto que demuestran la relevancia del álgebra lineal en el mundo real; éstos pueden servir como trabajos de grupo o proyectos cortos.

Muchos de los problemas de MATLAB® están diseñados para animar a los estudiantes a describir teoremas de álgebra lineal. Por ejemplo, un estudiante que genere varias matrices triangulares superiores y calcule sus inversas obtendrá la conclusión natural de que la inversa de una matriz triangular superior es otra triangular superior. La demostración de este resultado no es trivial, pero tendrá sentido si el estudiante “ve” que el resultado es aceptable. Prácticamente todos los conjuntos de problemas de MATLAB® contienen algunos que llevan a resultados matemáticos.

Lo mismo que en el caso del manejo de calculadora, se resalta aquí el hecho de que el material de MATLAB® es *opcional*. Se puede asignar o no según el profesor lo considere conveniente.

En lugar de colocar la sección de MATLAB a manera de suplemento, se decidió conservarlo dentro de los capítulos para que la integración fuera mayor y más efectiva. Además, se ha cuidado que primero se enseñe a los estudiantes la manera de resolver los problemas “a mano”, comprendiendo los conceptos, para después poder incorporar el uso de otras herramientas.

Álgebra lineal conserva el diseño de un libro para cubrirse en *un* semestre.

Es de esperarse que, al utilizarlo, el material de MATLAB se cubra en un laboratorio separado que complemente el trabajo del salón de clase.

Numeración

La numeración de este libro es estándar. Dentro de cada sección, los ejemplos, problemas, teoremas y ecuaciones se encuentran numerados consecutivamente a partir del número 1. Las referencias a los mismos fuera de la sección se llevan a cabo por capítulo, sección y número. De esta forma, el ejemplo 4 en la sección 2.5 se denomina ejemplo 4 en esa sección, pero fuera de ella se habla del ejemplo 2.5.4. Además, con frecuencia se proporciona el número de la página para que resulte sencillo encontrar referencias.

ORGANIZACIÓN

El enfoque que se ha utilizado en este libro es gradual. Los capítulos 1 y 2 contienen el material computacional básico común para la mayor parte de los libros de álgebra lineal. El capítulo 1 presenta los sistemas de ecuaciones lineales, vectores y matrices. Cubre todo el material de sistemas de ecuaciones antes de introducir los conceptos relacionados con matrices. Esta presentación proporciona

una mayor motivación para el estudiante y sigue el orden de la mayoría de los temarios del curso. También se incluyó una sección (1.12) en la que se aplican matrices a la teoría de gráficas. El capítulo 2 proporciona una introducción a los determinantes e incluye un ensayo histórico sobre las contribuciones de Leibniz y Cauchy al álgebra lineal (sección 2.3)

Dentro de este material básico, incluso hay secciones opcionales que representan un reto un poco mayor para el estudiante. Por ejemplo, la sección 2.3 proporciona una demostración completa de que $\det AB = \det A \det B$. La demostración de este resultado, mediante el uso de matrices elementales, casi nunca se incluye en libros introductorios.

El capítulo 3 analiza los vectores en el plano y el espacio. Muchos de los temas de este capítulo se cubren según el orden con el que se presentan en los libros de cálculo, de manera que es posible que el estudiante ya se encuentre familiarizado con ellos. Sin embargo, como una gran parte del álgebra lineal está relacionada con el estudio de espacios vectoriales abstractos, los alumnos necesitan un acervo de ejemplos concretos que el estudio de los vectores en el plano y el espacio proporciona de manera natural. El material más difícil de los capítulos 4 y 5 se ilustra con ejemplos que surgen del capítulo 3. La sección 3.4 incluye un ensayo histórico sobre Gibbs y el origen del análisis vectorial.

El capítulo 4 contiene una introducción a los espacios vectoriales generales y es necesariamente más abstracto que los capítulos anteriores. No obstante, intenté presentar el material como una extensión natural de las propiedades de los vectores en el plano, que es en realidad la forma en que surgió el tema. La sexta edición estudia las combinaciones lineales y el conjunto generado por ellas

(sección 4.4) antes de la independencia lineal (sección 4.5) para explicar estos temas de manera más clara. El capítulo 4 también incluye una sección (4.10) de aplicaciones interesantes sobre la aproximación por mínimos cuadrados.

Al final del capítulo 4 agregué una sección (4.12) opcional en la que demuestro que todo espacio vectorial tiene una base. Al hacerlo se analizan los conjuntos ordenados y el lema de Zorn. Dicho material es más complicado que cualquier otro tema en el libro y se puede omitir. Sin embargo, como el álgebra lineal a menudo se considera el primer curso en el que las demostraciones son tan importantes como los cálculos, en mi opinión el estudiante interesado debe disponer de una demostración de este resultado fundamental.

El capítulo 5 continúa el análisis que se inició en el capítulo 4 con una introducción a las transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro. Comienza con dos ejemplos que muestran la manera natural en la que pueden surgir las transformaciones.

El capítulo 6 describe la teoría de los valores y vectores característicos o valores y vectores propios. Se introducen en la sección 6.1 y en la sección 6.2 se da una aplicación biológica detallada al crecimiento poblacional. Las secciones 6.3, 6.4 y 6.5 presentan la diagonalización de una matriz, mientras que la sección 6.6 ilustra, para unos cuantos casos, cómo se puede reducir una matriz a su forma canónica de Jordan. La sección 6.7 estudia las ecuaciones diferenciales matriciales y es la única sección del libro que requiere conocimiento del primer curso de cálculo. Esta sección proporciona un ejemplo de la utilidad de reducir una matriz a su forma canónica de Jordan (que suele ser una matriz diagonal). En la sección 6.8, introduje dos de mis resultados favoritos acerca de la teoría de

matrices: el teorema de Cayley-Hamilton y el teorema de los círculos de Gershgorin. El teorema de los círculos de Gershgorin es un resultado muy rara vez estudiado en los libros de álgebra lineal elemental, que proporciona una manera sencilla de estimar los valores propios de una matriz.

En el capítulo 6 tuve que tomar una decisión difícil: si analizar o no valores y vectores propios complejos. Decidí incluirlos porque me pareció lo más adecuado. Algunas de las matrices “más agradables” tienen valores propios complejos. Si se define un valor propio como un número real, sólo en un principio se pueden simplificar las cosas, aunque esto sea un error. Todavía más, en muchas aplicaciones que involucran valores propios (incluyendo algunas de la sección 6.7), los modelos más interesantes se relacionan con fenómenos periódicos y éstos requieren valores propios complejos. Los números complejos no se evitan en este libro. Los estudiantes que no los han estudiado antes pueden encontrar las pocas propiedades que necesitan en el apéndice 2.

El libro tiene cinco apéndices, el primero sobre inducción matemática y el segundo sobre números complejos. Algunas de las demostraciones en este libro hacen uso de la inducción matemática, por lo que el apéndice 1 proporciona una breve introducción a esta importante técnica para los estudiantes que no la han utilizado.

El apéndice 3 analiza el concepto básico de la complejidad de los cálculos que, entre otras cosas, ayudará a los estudiantes a entender las razones por las cuales quienes desarrollan software eligen algoritmos específicos. El apéndice 4 presenta un método razonablemente eficiente para obtener la solución numérica

de los sistemas de ecuaciones. Por último, el apéndice 5 incluye algunos detalles técnicos sobre el uso de MATLAB® en este libro.

Una nota sobre la interdependencia de los capítulos: este libro está escrito en forma secuencial. Cada capítulo depende de los anteriores, con una excepción: el capítulo 6 se puede cubrir sin necesidad de gran parte del material del capítulo 5. Las secciones marcadas como “opcional” se pueden omitir sin pérdida de la continuidad.