The background of the page features a close-up, grayscale image of several interlocking gears. The gears are arranged in a way that creates a sense of depth and mechanical complexity. The lighting highlights the teeth and the circular surfaces of the gears, giving them a metallic appearance. A vertical line runs down the left side of the page, and a horizontal line runs across the middle, intersecting the gear image.

4

PARTE

Herramientas de análisis

19

Análisis de elementos finitos

Esquema del capítulo

19-1	Método del elemento finito	917
19-2	Geometrías del elemento	919
19-3	Proceso de solución del elemento finito	920
19-4	Generación de malla	923
19-5	Aplicación de la carga	924
19-6	Condiciones de frontera	926
19-7	Técnicas de modelado	927
19-8	Esfuerzos térmicos	929
19-9	Carga de pandeo crítica	929
19-10	Análisis de vibración	931
19-11	Resumen	932

Los componentes mecánicos en forma de vigas, barras simples, etc., se pueden analizar con bastante facilidad por medio de métodos básicos de la mecánica que proporcionan soluciones aproximadas. Sin embargo, los componentes reales rara vez son tan sencillos, y el diseñador se ve forzado a realizar aproximaciones menos eficaces mediante soluciones cercanas, experimentación o métodos numéricos. Existe un gran número de técnicas numéricas que se emplean en aplicaciones de ingeniería para las cuales la computadora digital es sumamente útil. En diseño mecánico, en el cual se utiliza de manera considerable el software de diseño asistido por computadora (CAD), el método de análisis que se integra perfectamente con el CAD es el *análisis de elemento finito* (FEA, por sus siglas en inglés). La teoría y aplicaciones matemáticas del método son enormes. Existe una diversidad de paquetes de software comerciales de FEA que se encuentran disponibles, como ANSYS, NASTRAN, ALGOR, etcétera.

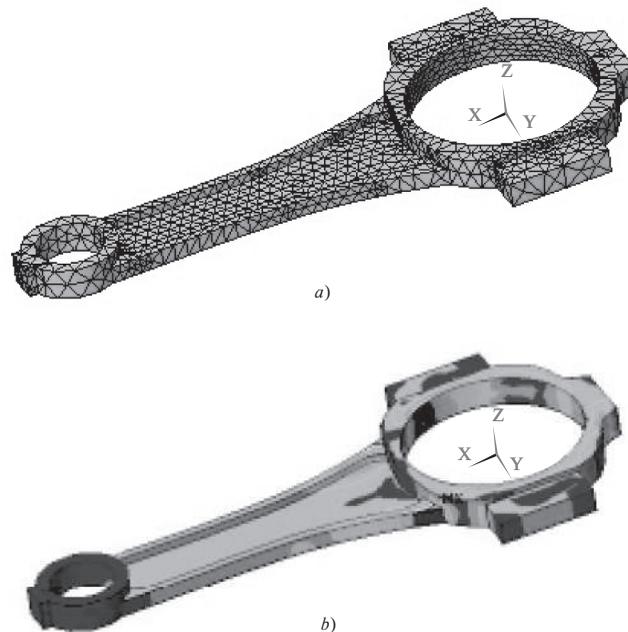
El propósito de este capítulo es exponer al lector algunos de los aspectos fundamentales del FEA, por lo cual la cobertura es simplemente introductoria. Para conocer detalles adicionales, se exhorta al lector a consultar las referencias que se citan al final de este capítulo. La figura 19-1 muestra un modelo de elemento finito de un cigüeñal que fue desarrollado para estudiar los efectos de la lubricación dinámica elastohidrodinámica en los cojinetes y su rendimiento estructural.¹

Existe una gran cantidad de aplicaciones del FEA como análisis estático y dinámico, lineal y no lineal, de esfuerzo y de deflexión; vibraciones libres y forzadas; transferencia de calor (que se puede combinar con el análisis de esfuerzo y de deflexión para proporcionar esfuerzos y deflexiones térmicamente inducidos); inestabilidad elástica (pandeo); acústica; electrostática y magnetismo (que se puede combinar con transferencia de calor); dinámica de fluidos; análisis de tuberías, y física múltiple. Para los propósitos de este capítulo, nos limitaremos a los análisis mecánicos básicos.

Un componente mecánico real es una estructura elástica continua (un continuo). El FEA divide (“discretiza”), la estructura en pequeñas subestructuras (elementos) de tipo elástico, bien definidas pero finitas. Al emplear funciones polinomiales, en conjunto con ope-

Figura 19-1

Modelo de un cigüeñal empleando software de elemento finito ANSYS. *a)* Modelo enmallado; *b)* contornos de esfuerzo. Cortesía de S. Boedo (véase la nota de pie de pág. 1).



¹S. Boedo, “Elastohydrodynamic Lubrication of Conformal Bearing Systems”, *Proceedings of 2002 ANSYS Users Conference*, Pittsburg, PA, abril 22-24, 2002.

raciones matriciales, el comportamiento elástico continuo de cada elemento se desarrolla en términos del material y las propiedades geométricas del elemento. Las cargas se aplican dentro del elemento (gravedad, dinámica, térmica, etc.), en la superficie del elemento o en los *nodos* del mismo. Estos nodos son las entidades fundamentales de gobierno del elemento, en la medida en que en el nodo se conecta un elemento con los otros, donde finalmente se establecen, al final, las propiedades elásticas de los mismos, se asignan las condiciones de frontera y, por último, se aplican las fuerzas (de contacto o cuerpo). Un nodo posee *grados de libertad* (dof, por sus siglas en inglés). Los grados de libertad son los movimientos independientes de rotación y traslación que pueden existir en un nodo. Como máximo, un nodo puede tener tres grados de libertad rotacionales y tres traslacionales. Una vez que cada nodo dentro de la estructura está definido *localmente* en forma matricial, entonces los elementos se ensamblan (unen) *globalmente* a través de sus nodos en común (dof's) en una matriz global del sistema. Las cargas aplicadas y las condiciones de frontera se especifican y mediante operaciones matriciales se determinan los valores de todos los grados de libertad de desplazamiento desconocidos. Una vez que se ha realizado este procedimiento, es algo simple hacer uso de estos desplazamientos para determinar las tensiones y esfuerzos por medio de las ecuaciones constitutivas de elasticidad.

19-1 Método del elemento finito

El desarrollo moderno del método de elemento finito comenzó en la década de 1940, en el campo de la mecánica estructural con el trabajo de Hrennikoff,² McHenry³ y Newmark,⁴ quienes emplearon una red o rejilla de elementos lineales (varillas y vigas) para solucionar esfuerzos en sólidos continuos. En 1943, a partir de un artículo de 1941, Courant⁵ sugirió una interpolación polinomial por pasos sobre regiones triangulares como el método para modelar problemas de torsión. Con el advenimiento de las computadoras digitales en la década de 1950, esta propuesta se pudo llevar a la práctica por los ingenieros para escribir y resolver las ecuaciones de rigidez en forma matricial.^{6,7,8} Un artículo clásico de Turner, Clough, Martin y Topp, que se publicó en 1956, presentaba las ecuaciones matriciales de rigidez de los puntales, vigas y otros elementos.⁹ La expresión *elemento finito* se atribuye primero a Clough.¹⁰ Con base en estos primeros antecedentes, se han realizado una gran cantidad de esfuerzos para desarrollar el método del elemento finito en el área de las formulaciones de los elementos, así como en la instrumentación computacional del proceso de solución completo. Los mayores avances en tecnología computacional incluyen las capacidades del hardware que se extienden rápidamente, las rutinas de resolución de matrices eficientes y precisas, y las gráficas por computadora que facilitan visualizar las etapas de procesamiento previo a la revisión de los resultados de la solución. Se ha presentado una gran abundancia de literatura sobre el tema,

²A. Hrennikoff, "Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 8, núm. 4, pp. 169-175, diciembre de 1941.

³D. McHenry, "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems", *Journal of Institution of Civil Engineers*, vol. 21, pp. 59-82, diciembre de 1943.

⁴N. M. Newmark, "Numerical Methods of Analysis in Bars, Plates, and Elastic Bodies", *Numerical Methods in Analysis in Engineering* (ed. L. E. Grinter), Macmillan, 1949.

⁵R. Courant, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, pp. 1-23, 1943.

⁶S. Levy, "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings", *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 20, núm. 7, pp. 449-454, julio de 1953.

⁷J. H. Argyris, "Energy Theorems and Structural Analysis," *Aircraft Engineering*, octubre, noviembre, diciembre de 1954 y febrero, marzo, abril, mayo de 1955.

⁸J. H. Argyris y S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, Londres, 1960 (reimpreso de *Aircraft Engineering*, 1954-1955).

⁹M. J. Turner, R.W. Clough, R. H. Martin y L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, núm. 9, pp. 805-824, septiembre de 1956.

¹⁰R. W. Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", *Proceedings of the Second Conference on Electronic Computation*, American Society of Civil Engineers, Pittsburgh, PA, pp. 345-378, septiembre de 1960.

la que incluye muchos libros de texto. Al final de este capítulo se proporciona una lista parcial de algunos de ellos, introductorios y más detallados.

Puesto que el método del elemento finito es una técnica numérica que convierte el dominio de una estructura continua en valores discretos, los errores son inevitables. Estos errores son:

- 1. Errores computacionales.** Estos se deben a errores de redondeo provenientes de los cálculos de punto flotante de la computadora y de las formulaciones de los esquemas de integración numérica que se utilizan. La mayoría de los códigos comerciales de elemento finito se concentran en reducir estos errores y, en consecuencia, el analista por lo regular se interesa en los factores relacionados con los valores discretos.
- 2. Errores de conversión discreta.** La geometría y distribución del desplazamiento de una estructura real varían continuamente. El uso de un número finito de elementos para modelar la estructura introduce errores al igualar la geometría y distribución del desplazamiento debido a las limitaciones matemáticas inherentes a los elementos.

Para apreciar un ejemplo de errores de conversión a valores discretos, considere la estructura de la placa delgada, de grosor o espesor constante, que se ilustra en la figura 19-2a). La figura 19-2b) muestra un modelo de elemento finito de la estructura en el cual se emplean elementos triangulares simples de esfuerzo plano con tres nodos. Este tipo de elemento tiene un defecto que da origen a dos problemas básicos. El elemento tiene lados rectos que permanecen así después de la deformación. Las tensiones a través del elemento triangular de esfuerzo plano son constantes. El primer problema, de tipo geométrico, es el modelado de los bordes curvos. Observe que la superficie del modelo con una gran curvatura parece tener un modelado deficiente, mientras que la superficie del orificio tiene un modelado razonablemente bueno. El segundo problema, mucho más severo, es que las tensiones en diversas regiones de la estructura real cambian con rapidez, y el elemento de tensión constante solo proporcionará una aproximación de la tensión promedio en el centro del elemento. De este modo, en pocas palabras, los resultados predichos por este modelo serán en extremo deficientes. Los resultados pueden mejorarse si se aumenta de manera significativa el número de elementos (mediante el incremento de la densidad de la malla). De modo alternativo, si se emplea un elemento mejor, como un cuadrilátero de ocho nodos, que es más adecuado para la aplicación, proporcionará mejores resultados. Debido a las funciones de interpolación de orden superior, el elemento cuadrilátero de ocho nodos puede modelar bordes curvos y mantener una función de orden superior para distribuir la tensión.

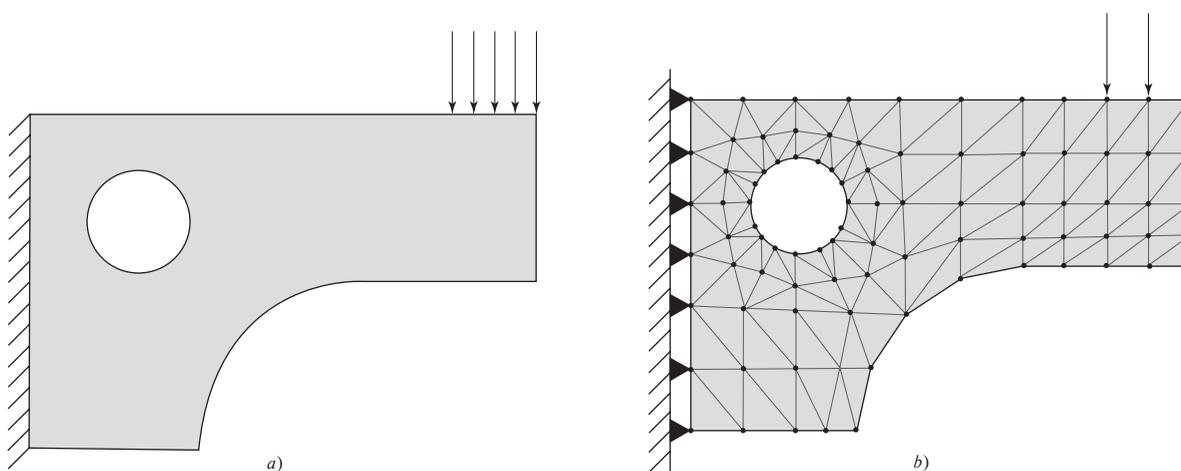


Figura 19-2

Problema estructural. a) Modelo idealizado; b) modelo de elemento finito.

En la figura 19-2b), los elementos triangulares se encuentran sombreados, mientras que los puntos negros representan los nodos de los elementos. Las fuerzas y las limitantes solo se pueden colocar en los nodos. Los nodos de elementos de esfuerzo de un plano triangular simple tienen dos grados de libertad, correspondientes a la traslación en el plano. De este modo, los triángulos de soporte simple en el borde izquierdo, en negro sólido, representan el soporte fijo del modelo. Por otro lado, como se ilustra, la carga distribuida puede aplicarse solo a tres nodos. La carga modelada tiene que ser estáticamente consistente con la carga real.

19-2 Geometrías del elemento

Se utilizan muchas formas geométricas de elementos en el análisis del elemento finito para aplicaciones específicas. Los diversos elementos que emplean los códigos de software comercial FEM de propósito general constituyen lo que se conoce como la *biblioteca de elementos* del código. Los elementos pueden ubicarse en las siguientes categorías: *elementos de línea*, *elementos de superficie*, *elementos sólidos* y *elementos de propósito específico*. La tabla 19-1 proporciona algunos, pero no todos, los tipos de elementos disponibles para el análisis de elemento finito de problemas estructurales. No todos los elementos soportan todos los grados de libertad. Por ejemplo, el elemento de puntal en 3-D soporta únicamente tres grados de libertad traslacionales en cada nodo. Cuando se conectan elementos con grados de libertad diferentes, por lo general se requiere de alguna modificación manual. Por ejemplo, considere la conexión de un elemento de puntal a un elemento de la estructura. Este último soporta la totalidad de los seis grados de libertad en cada nodo. Un miembro de los puntales, cuando se conecta al anterior, puede girar libremente en la conexión.

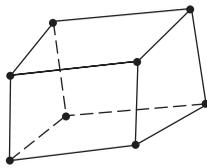
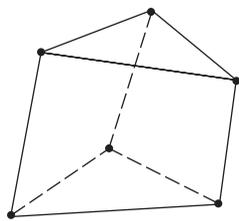
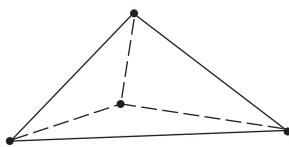
Tabla 19-1

Biblioteca de muestra de elemento finito

Tipo de elemento	Ninguno	Forma	Número de nodos	Aplicaciones
Línea	Puntal		2	Barra con extremos articulados en tensión o compresión
	Viga		2	Flexión
	Armazón		2	Axial, torsional o de flexión Con o sin rigidez de carga
Superficie	Cuadrilátero de 4 nodos		4	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, panel a cortante, placa plana delgada en flexión
	Cuadrilátero de 8 nodos		8	Esfuerzo o deformación plana, placa plana o cascarón en flexión
	Triangular de 3 nodos		3	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, panel a cortante, placa plana delgada en flexión. Preferible cuadriláteros donde sea posible. Usado para transiciones de cuadriláteros
	Triangular de 6 nodos		6	Esfuerzo o deformación plana, simétrico con respecto a un eje, placa plana o cascarón en flexión. Preferible cuadriláteros donde sea posible. Usado para transiciones de cuadriláteros

(continúa)

Tabla 19-1 Biblioteca de muestra de elemento finito (*continuación*)

Tipo de elemento	Ninguno	Forma	Número de nodos	Aplicaciones
Sólido [†]	Hexagonal de 8 nodos (paralelepípedo o ladrillo)		8	Sólido, placa gruesa
	Pentagonal de 6 nodos (cuña)		6	Sólido, placa gruesa. Usado para transiciones
	Tetraedro de 4 nodos (tetra)		4	Sólido, placa gruesa. Usado para transiciones
Propósito especial	Brecha		2	Desplazamientos libres para espacios pre-establecidos
	Gancho, conexión		2	Desplazamientos libres para espacios pre-establecidos
	Rígido		Variable	Restricción rígida entre nodos

[†] Estos elementos también se encuentran disponibles con nodos intermedios.

19-3 Proceso de solución del elemento finito

Se describirá el proceso de solución del elemento finito mediante un problema unidimensional muy simple, para lo cual se utiliza el elemento de puntal lineal. Un elemento de puntal es una barra con carga en tensión o compresión de área transversal constante A , longitud l y módulo elástico E . El elemento de puntal básico tiene dos nodos, y en un problema unidimensional, cada nodo tendrá solamente un grado de libertad. Un elemento de puntal puede modelarse como un resorte lineal simple con un índice de elasticidad, dado por la ecuación (4-4), p. 157, como

$$k = \frac{AE}{l} \tag{19-1}$$

Considere un elemento de resorte (e) con índice de elasticidad k_e , con nodos i y j , como se muestra en la figura 19-3. Los nodos y elementos se encuentran numerados. Así, para evitar confusión con respecto a lo que corresponde cada número, los elementos estarán numerados entre paréntesis. Bajo el supuesto de que todas las fuerzas f y desplazamientos u que se dirigen hacia la derecha son positivos, las fuerzas de cada nodo pueden escribirse como

$$\begin{aligned} f_{i,e} &= k_e (u_i - u_j) = k_e u_i - k_e u_j \\ f_{j,e} &= k_e (u_j - u_i) = -k_e u_i + k_e u_j \end{aligned} \tag{19-2}$$

Las dos ecuaciones se expresan en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} f_{i,e} \\ f_{j,e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (19-3)$$

A continuación, considere un sistema de dos resortes como se ilustra en la figura 19-4a). En ella se han numerado tanto los nodos como los elementos. También se han etiquetado las fuerzas en cada nodo. No obstante, estas fuerzas son las fuerzas totales externas en cada nodo, F_1 , F_2 y F_3 . Si se dibujan diagramas de cuerpo libre por separado se revelarán las fuerzas internas como se muestra en la figura 19-4b).

Figura 19-3

Elemento de resorte simple.

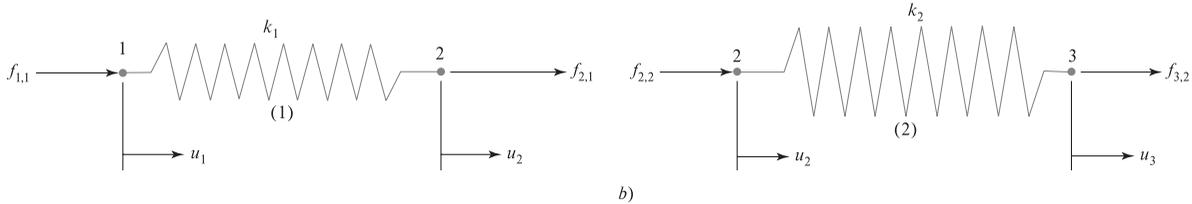
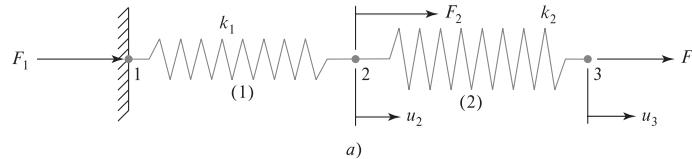
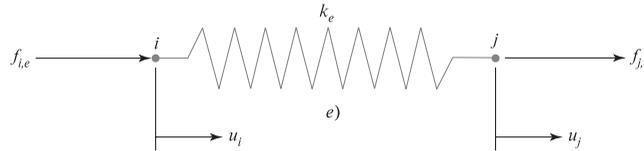


Figura 19-4

Sistema de resortes de dos elementos. a) Modelo del sistema; b) diagramas de cuerpo libre por separado.

Utilizando la ecuación (19-3) para cada resorte se obtiene

Elemento 1
$$\begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (19-4a)$$

Elemento 2
$$\begin{Bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19-4b)$$

La fuerza total en cada nodo es la fuerza externa, $F_1 = f_{1,1}$, $F_2 = f_{2,1} + f_{2,2}$ y $F_3 = f_{3,2}$. Combinando las dos matrices en términos de las fuerzas externas se tiene que

$$\begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} + f_{2,2} \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19-5)$$

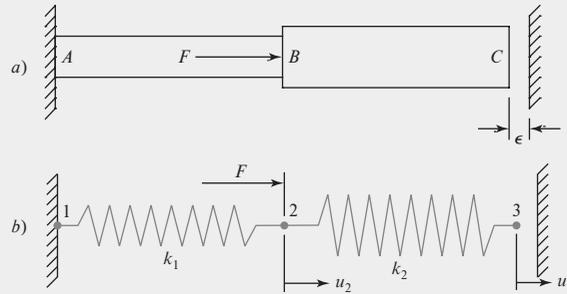
Si conocemos el desplazamiento de un nodo, entonces la fuerza en él será desconocida. Por ejemplo, en la figura 19-4a), el desplazamiento del nodo 1 en la pared es cero, de modo que F_1 es la fuerza de reacción desconocida (observe, hasta este punto, que no se aplicó una solución estática del sistema). Si no se conoce el desplazamiento de un nodo, entonces se conoce la fuerza. Por ejemplo, en la figura 19-4a), los desplazamientos en los nodos 2 y 3 son desconocidos, y las fuerzas F_2 y F_3 están por ser especificadas. Para ver cómo se instrumenta el residuo del proceso de solución, considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 19-1

Considere el eje escalonado que se muestra en la figura 19-5a). Las áreas de las secciones *AB* y *BC* son 0.100 pulg² y 0.150 pulg², respectivamente. Las longitudes de las secciones *AB* y *BC* son 10 y 12 pulg, respectivamente. Una fuerza $F = 1\,000$ lbf se aplica a *B*. Al inicio existe un espacio de $\epsilon = 0.002$ pulg entre el extremo *C* y la pared rígida de la derecha. Determine las reacciones de la pared, las fuerzas internas en los miembros, así como la deflexión del punto *B*.

Figura 19-5

a) Eje escalonado, b) modelo de resortes.



Supongamos que $E = 10$ Mpsi y asumamos que el extremo *C* toca la pared. Compruebe la validez de la suposición.

Solución El eje escalonado se modela por medio del sistema de dos resortes de la figura 19-5b) donde

$$k_1 = \left(\frac{AE}{l} \right)_{AB} = \frac{0.1(10)10^6}{10} = 1(10^5) \text{ lbf/pulg}$$

$$k_2 = \left(\frac{AE}{l} \right)_{BC} = \frac{0.15(10)10^6}{12} = 1.25(10^5) \text{ lbf/pulg}$$

Con $u_1 = 0$, $F_2 = 1\,000$ lbf y el supuesto de que $u_3 = \epsilon = 0.002$ pulg, la ecuación (19-5) se convierte en

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 1\,000 \\ F_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.25 & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Para problemas extensos, existe un método sistemático para resolver ecuaciones como la (1), que se denomina *partición o enfoque de eliminación*.¹¹ Sin embargo, para este problema simple, la solución es bastante sencilla. De la segunda ecuación de la ecuación matricial

$$1\,000 = 10^5[-1(0) + 2.25 u_2 - 1.25(0.002)]$$

o bien,

Respuesta
$$u_B = u_2 = \frac{1000/10^5 + 1.25(0.002)}{2.25} = 5.556(10^{-3}) \text{ pulg}$$

Puesto que $u_B < \epsilon$, se verifica que el punto *C* alcanza la pared.

Las reacciones en las paredes son F_1 y F_3 . De la primera y tercera ecuaciones de la matriz de la ecuación (1),

Respuesta
$$F_1 = 10^5[-1(u_2)] = 10^5[-1(5.556)10^{-3}] = -555.6 \text{ lbf}$$

¹¹ Véase T. R. Chandrupatla y A. D. Belegundu, *Introduction to Finite Elements in Engineering*, 4a. ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2012, pp. 71-75.

y

$$\begin{aligned} \text{Respuesta} \quad F_3 &= 10^5[-1.25u_2 + 1.25(0.002)] \\ &= 10^5[-1.25(5.556)10^{-3} + 1.25(0.002)] = -444.4 \text{ lbf} \end{aligned}$$

Debido a que F_3 es negativa, esto también verifica que C alcanza la pared. Observe que $F_1 + F_3 = -555.6 - 444.4 = -1000$ lbf, lo que equilibra la fuerza aplicada (sin ecuaciones de estática necesarias).

En el caso de las fuerzas internas, es necesario regresar a las ecuaciones individuales (locales). De la ecuación (19-4a),

$$\begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5.556(10^{-3}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -555.6 \\ 555.6 \end{Bmatrix} \text{ lbf}$$

Respuesta Puesto que $f_{1,1}$ se dirige hacia la izquierda y $f_{2,1}$ hacia la derecha, el elemento se encuentra en tensión, con una fuerza de 555.6 lbf. Si se desea conocer el esfuerzo, es simplemente $\sigma_{AB} = f_{2,1}/A_{AB} = 555.6/0.1 = 5556$ psi.

En el caso del elemento BC , de la ecuación (19-4b),

$$\begin{Bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.556(10^{-3}) \\ 0.002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 444.5 \\ -444.5 \end{Bmatrix} \text{ lbf}$$

Respuesta Puesto que $f_{2,2}$ se dirige hacia la derecha y $f_{3,2}$ hacia la izquierda, el elemento se encuentra en compresión, con una fuerza de 444.5 lbf. Si se desea conocer el esfuerzo, es simplemente $\sigma_{BC} = 2f_{2,2}/A_{BC} = -444.5/0.15 = -2963$ psi.

19-4 Generación de malla

La red de elementos y nodos que “discretizan” una región se conoce como *malla*. La *densidad de malla* se incrementa a medida que más elementos se colocan dentro de una región dada. El *refinamiento de malla* ocurre cuando la malla se modifica de un análisis de un modelo al siguiente análisis para producir resultados mejorados. Por lo general, los resultados mejoran cuando la densidad de malla se incrementa en áreas de gradientes de esfuerzo alto y/o cuando las zonas de transición geométrica se enmallan de manera uniforme. Por lo general, pero no siempre, los resultados del FEA convergen hacia resultados exactos a medida que el enmallado se refina continuamente. Para valorar la mejora, en las regiones donde aparecen gradientes de esfuerzo alto, la estructura puede volver a mallarse con una densidad mayor. Si existe un mínimo cambio en el máximo valor de esfuerzo, es razonable presumir que la solución ha convergido. Existen tres formas básicas para generar una malla de elementos: manual, semiautomática o completamente automática.

- 1. Generación manual de mallas.** Así es como se creaba la malla de elementos en los primeros días del método de elemento finito. Este es un método intensivo de mucha labor para crear una malla, y excepto por algunas modificaciones rápidas de un modelo se utiliza raras veces. *Nota:* Debe tenerse cuidado al editar el archivo de texto de entrada. Con cierto software FEA, otros archivos como el archivo de gráficos binario del preprocesador puede no modificarse. Por consiguiente, los archivos pueden ya no ser compatibles entre sí.
- 2. Generación semiautomática de malla.** A lo largo de los años se han desarrollado algoritmos computacionales que le permiten al modelador enmallar de manera automática las regiones de la estructura que se está dividiendo, mediante el empleo de límites bien definidos. Puesto que el modelador tiene que definir estas regiones, la técnica se considera *semiautomática*. El desarrollo de los variados algoritmos computacionales para generar mallas proviene del

campo de los gráficos por computadora. Si el lector desea más información acerca de este tema, se recomienda una revisión de la literatura disponible sobre él.

- 3. Generación completamente automática de mallas.** La mayor parte de los distribuidores de software han concentrado sus esfuerzos en desarrollar la generación completamente automática de mallas, y, en algunos casos, con un refinamiento para mallas automáticas *autoadaptables*. El objetivo obvio es reducir de manera significativa el tiempo de preprocesamiento del modelador, así como el esfuerzo para llegar a una malla de FEA final bien construida. Una vez que se han definido las fronteras o los límites completos de la estructura, sin subdivisiones como en la generación semiautomática de mallas y con un mínimo de intervención por parte del usuario, se tienen disponibles diversos esquemas para discretizar la región con *un tipo de elemento*. En el caso de problemas elásticos planos, los límites o fronteras se definen mediante una serie de líneas geométricas internas y externas, y el tipo de elemento que formará la malla automáticamente será el elemento elástico plano. Para estructuras de paredes delgadas, la geometría se define por medio de representaciones de superficie tridimensionales y el tipo de elemento que formará la malla en automático será el elemento de placa tridimensional. Para estructuras sólidas, las fronteras podrían construirse empleando técnicas de *geometría sólida constructiva (CSG)* o bien *representación de frontera (rep B)*. Los tipos de elemento finito del mallado automático serían el paralelepípedo y/o el (los) elemento(s) tetraédrico(s).

Los programas de refinamiento automático autoadaptativo de mallas calculan el error de la solución FEA. Con base en ese error, la malla se revisa de manera automática y vuelve a analizarse. El proceso se repite hasta que se satisface alguna convergencia o bien un criterio de terminación.

De regreso al modelo de placa delgada de la figura 19-2, las fronteras de la estructura se construyen como se muestra en la figura 19-6a). Las fronteras se autogeneraron entonces como se muestra en la figura 19-6b), donde se generaron 294 elementos y 344 nodos. Observe la uniformidad de la generación de elementos en las fronteras. El solucionador de elemento finito genera entonces las deflexiones y esfuerzos de Von Mises que se muestran en la figura 19-6c). El máximo esfuerzo de Von Mises en la ubicación que se muestra es 4 110.4 psi. El modelo se autogenera entonces con una densidad de malla incrementada como se ilustra en la figura 19-6d), donde el modelo tiene 1 008 elementos y 1 096 nodos. Los resultados se muestran en la figura 19-6e), donde se encuentra que el esfuerzo máximo de Von Mises es de 4 184.9 psi, lo que es solo 1.8% mayor. Con toda seguridad, la solución casi ha convergido. *Nota:* Los contornos de esfuerzo de las figuras 19-6c) y e) se visualizan mejor si se los colorea.

Cuando se encuentran presentes concentraciones de esfuerzo, es necesario tener una malla muy fina en la región de concentración de esfuerzo con el fin de obtener resultados realistas. Lo que es importante es que la densidad de la malla necesita incrementarse únicamente en la región alrededor de la concentración de esfuerzo y que la malla de transición del resto de la estructura hacia la región de concentración de esfuerzo sea gradual. Una transición de malla abrupta, en sí misma, tendrá el mismo efecto que una concentración de esfuerzo. Esta concentración se explicará con más detalle en la sección 19-7 (Técnicas de modelado).

19-5 Aplicación de la carga

Existen dos formas básicas de especificar cargas en una estructura: nodal y por carga de elementos. No obstante, la carga de elementos finalmente se aplica a los nodos empleando cargas nodales equivalentes. Un aspecto de la aplicación de cargas se relaciona con el principio de Saint-Venant. Si no se tiene interés acerca de los esfuerzos cercanos a los puntos de aplicación de carga, no es necesario intentar distribuir la carga de manera muy precisa. La fuerza neta y/o momento puede aplicarse a un solo nodo, siempre que el elemento soporte los grados de libertad asociados con la fuerza y/o el momento en el nodo. Sin embargo, el analista no debe sorprenderse, o preocuparse, cuando revise los resultados y los esfuerzos en la vecindad del punto de aplicación de la carga y encuentre que son muy grandes. Los momentos concentra-

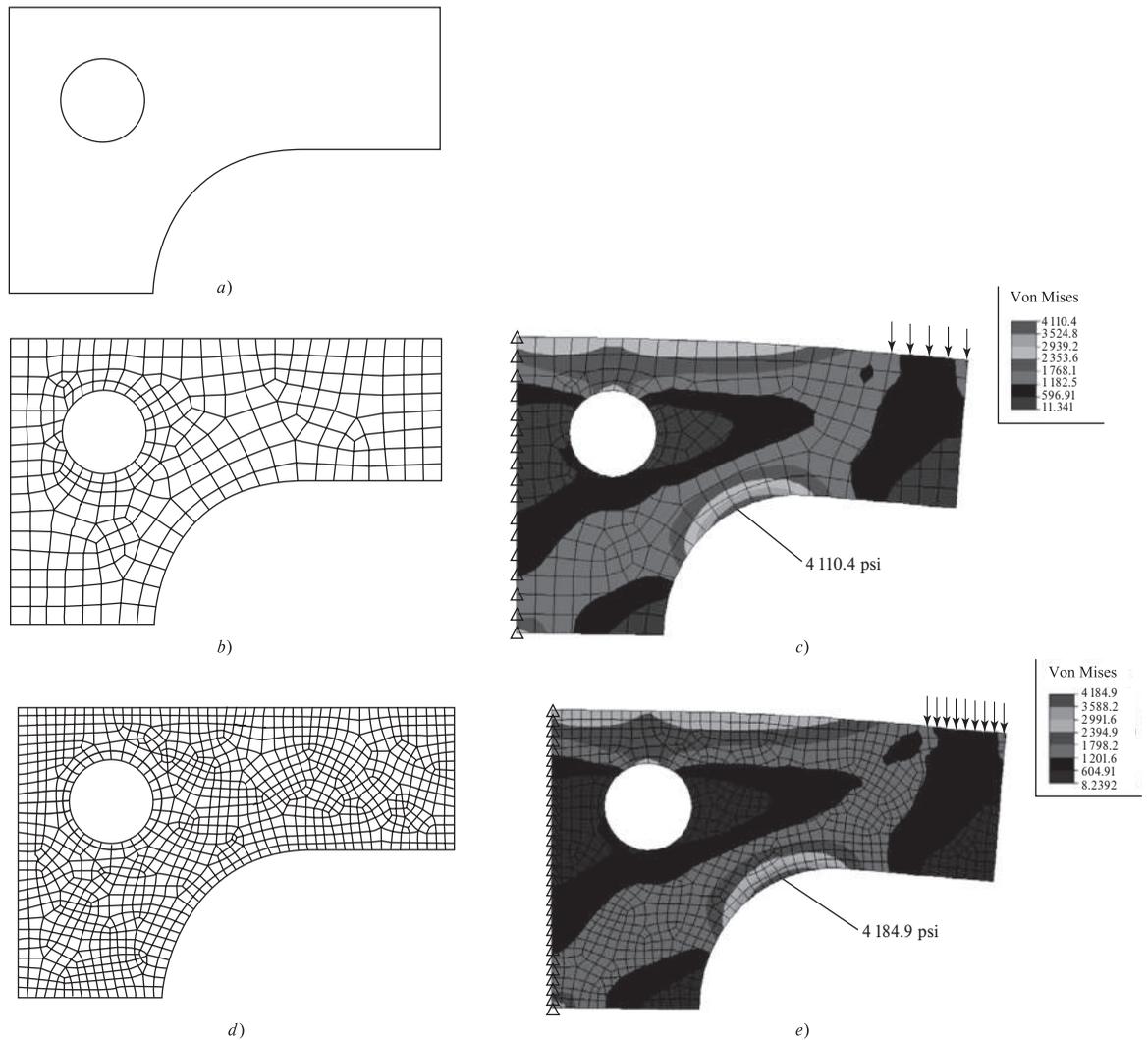


Figura 19-6

Enmallado automático del modelo de placa delgada de la figura 19-2. *a)* Fronteras del modelo; *b)* enmallado automático con 294 elementos y 344 nodos; *c)* deflexión (a escala exagerada) con contornos de esfuerzo; *d)* enmallado automático con 1 008 elementos y 1 096 nodos; *e)* deflexión (a escala exagerada) con contornos de esfuerzo.

dos pueden aplicarse a los nodos de vigas y la mayoría de los elementos de placas. No obstante, los momentos concentrados no pueden aplicarse a elementos de puntales, planos elásticos bidimensionales, axiales simétricos o de ladrillos, pues no soportan grados de libertad rotacionales. Un momento puro se puede aplicar a estos elementos solamente mediante el empleo de fuerzas en la forma de un par. Mediante la mecánica de la estática se puede generar un par empleando dos o más fuerzas que actúen en un plano donde la fuerza neta de las mismas sea igual a cero. El momento neto de las fuerzas es un vector perpendicular al plano de las fuerzas y es la sumatoria de los momentos de las fuerzas que se toman en cualquier punto común.

Las cargas de elementos incluyen cargas estáticas debidas a la gravedad (peso), efectos térmicos, cargas superficiales como la presión hidrostática y uniforme, y cargas dinámicas debidas a aceleración constante y rotación en estado estacionario (aceleración centrífuga). Como se estableció con anterioridad, las cargas de elementos se convierten por medio de software en las cargas nodales equivalentes y al final se tratan como cargas concentradas que se aplican a los nodos.

Para carga de gravedad, la gravedad constante en unidades adecuadas y la dirección de la misma deben ser suministradas por el modelador. Si la longitud del modelo y las unidades de fuerza son pulgadas y lbf, $g = 386.1 \text{ ips}^2$. Si dicha longitud, así como las unidades de fuerza, están dadas en metros y newtons, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. La dirección de la gravedad normalmente se encuentra hacia el centro de la Tierra.

Para carga térmica, el coeficiente de expansión térmica α debe proporcionarse para cada material, además de la temperatura inicial de la estructura y las temperaturas nodales finales. La mayoría de los paquetes de software tiene capacidad para efectuar primero un análisis de transferencia de calor de elemento finito sobre la estructura para determinar las temperaturas nodales finales. Los resultados de temperatura se guardan en un archivo, así pueden transferirse al análisis de esfuerzo estático. En este caso el modelo de transferencia térmica debería tener los mismos nodos y tipo de elemento que el correspondiente al modelo del análisis de esfuerzo estático.

Por lo general, la carga superficial se aplica a la mayoría de los elementos. Por ejemplo, las cargas de línea transversal lineal o uniforme (fuerza/longitud) pueden especificarse en vigas. Por lo regular, la presión uniforme y lineal puede aplicarse en los bordes de elementos axiales simétricos y de plano bidimensional. La presión lateral se aplica sobre elementos de placa y sobre la superficie de elementos de ladrillo sólidos. Cada paquete de software tiene su propia forma para especificar estas cargas superficiales, habitualmente en combinación de modos de texto y gráficos.

19-6 Condiciones de frontera

La simulación de las condiciones de frontera y otras formas de limitantes probablemente es la parte más difícil del modelado preciso de una estructura para un análisis de elemento finito. Con limitantes específicas, es relativamente sencillo cometer errores de omisión o distorsión. Para el analista puede ser necesario probar diferentes enfoques para modelar limitantes enigmáticas como uniones de pernos, soldaduras, etc., que no son tan simples como las uniones fijas o pernos idealizados. La prueba debería confinarse a problemas simples y no a una estructura grande y compleja. En ocasiones, cuando la naturaleza exacta de una condición límite o de frontera es incierta, solo pueden ser posibles los límites de comportamiento. Por ejemplo, se han modelado ejes con cojinetes con soporte simple. Es más probable que el soporte sea algo entre soporte simple y fijo, y se podrían analizar ambas limitantes para establecer los límites. Sin embargo, al suponer un soporte simple, los resultados de la solución son conservadores para esfuerzos y deflexiones. Es decir, la solución pronosticaría esfuerzos y deflexiones mayores que las reales.

Para otro ejemplo, considere la viga 16 de la tabla A-9. La viga horizontal está uniformemente cargada y se encuentra fija en ambos extremos. Aunque no se establece de manera explícita, las tablas como esta suponen que las vigas no se encuentran restringidas o limitadas en dirección horizontal. Es decir, se supone que la viga puede deslizarse horizontalmente en los soportes. Si los extremos estuvieran parcial o completamente contenidos, sería necesaria una solución de viga-columna.¹² Con un análisis de elemento finito, podría emplearse un elemento especial, como una viga con reforzamiento.

Las *ecuaciones de restricción de punto múltiple* se emplean con bastante frecuencia para modelar condiciones de frontera o conexiones rígidas entre miembros elásticos. Cuando se utilizan en esta última forma, las ecuaciones actúan como elementos y entonces se conocen como *elementos rígidos*. Los elementos rígidos pueden rotar o trasladarse únicamente de manera rígida.

Los *elementos de frontera* se utilizan para forzar desplazamientos específicos distintos de cero sobre una estructura. Los elementos de frontera también pueden ser útiles al modelar condiciones de frontera que son laterales del sistema coordinado global.

¹²Véase R. B. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999, pp. 471-482.

19-7 Técnicas de modelado

Con los actuales paquetes de CAD y generadores automáticos de mallas, es una tarea cómoda crear un modelo sólido y mallar el volumen con elementos finitos. Con las velocidades de computación actuales y con sobrada memoria de trabajo computacional, es muy fácil crear un modelo con números extremadamente grandes de elementos y nodos. Las técnicas antiguas de modelado de elemento finito parecen pasadas de moda e innecesarias. No obstante, puede gastarse mucho tiempo de manera innecesaria en un modelo sumamente complejo cuando uno mucho más sencillo funcionaría. El modelo complejo puede incluso no proporcionar una solución precisa, mientras que un modelo más simple lo hará. ¿Cuán importante es la solución que el analista trata de encontrar: deflexiones, esfuerzos o ambos?

Por ejemplo, considere el eje escalonado de acero del ejemplo 4-7, p. 167, que se repite aquí como la figura 19-7a). Suponga que los entalles de los escalones tengan un radio de 0.02 pulg. Si únicamente se buscaran las deflexiones y las pendientes en los escalones, un modelo sólido sumamente enmallado no sería mucho más preciso que el modelo simple de viga de cinco elementos que se muestra en la figura 19-7b). Los entalles de los escalones, que no serían fáciles de modelar con elementos de viga, no contribuirían gran cosa para hacer una diferencia en los resultados entre los dos modelos. Los nodos son necesarios dondequiera que se presenten condiciones de frontera, fuerzas aplicadas y modificaciones en la sección transversal y/o materiales. Los resultados de desplazamiento del modelo de FEA se muestran en la figura 19-7c).

El modelo FE de la figura 19-7b) no puede proporcionar el esfuerzo en el entalle del escalón en D . En este caso tendría que desarrollarse y enmallarse un modelo sólido completamente moldeado, utilizando elementos sólidos con una alta densidad de malla en el entalle, como se ilustra en la figura 19-8a). Aquí, los escalones en los soportes de cojinetes no se encuentran modelados, ya que solo se tiene interés en la concentración de esfuerzos en $x = 8.5$ pulg. Los elementos de paralelepípedo y tetraedro no soportan grados de libertad rotacionales. Para modelar la condición de frontera simplemente soportada en el extremo izquierdo, la traslación de los nodos a lo largo del eje z se limitó en las direcciones x y y . La traslación de los nodos a lo largo del eje y se limitó en la dirección z . La traslación de los nodos del extremo derecho sobre un eje paralelo al eje z a través del centro del eje se limitó en la dirección y , y la traslación de los nodos sobre un eje paralelo al eje y a través del centro del eje se limitó en la dirección z . Esto asegura que no haya traslación o rotación de cuerpo rígido y no crea limitaciones excesivas en los extremos. El máximo esfuerzo de tensión en el entalle en la parte inferior de la viga se calcula como $\sigma_{\text{máx}} = 23.9$ kpsi. Si se realiza una verificación analítica en el escalón se obtiene $D/d = 1.75/1.5 = 1.167$ y $r/d = 0.02/1.5 = 0.0133$. La figura A-15-9 no es muy precisa para estos valores.

Figura 19-7

a) Eje escalonado de acero del ejemplo 4-7; b) modelo de elemento finito empleando cinco elementos de viga.

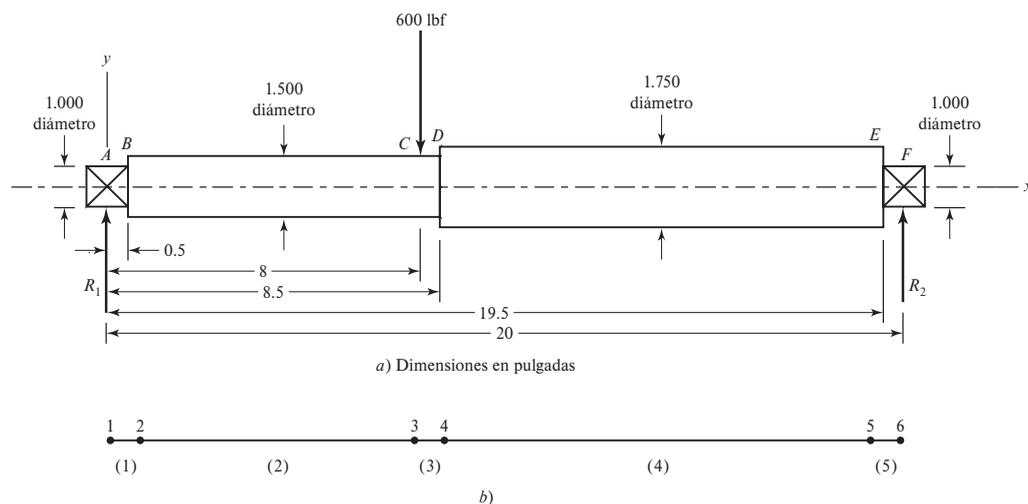


Figura 19-7 (continuación)

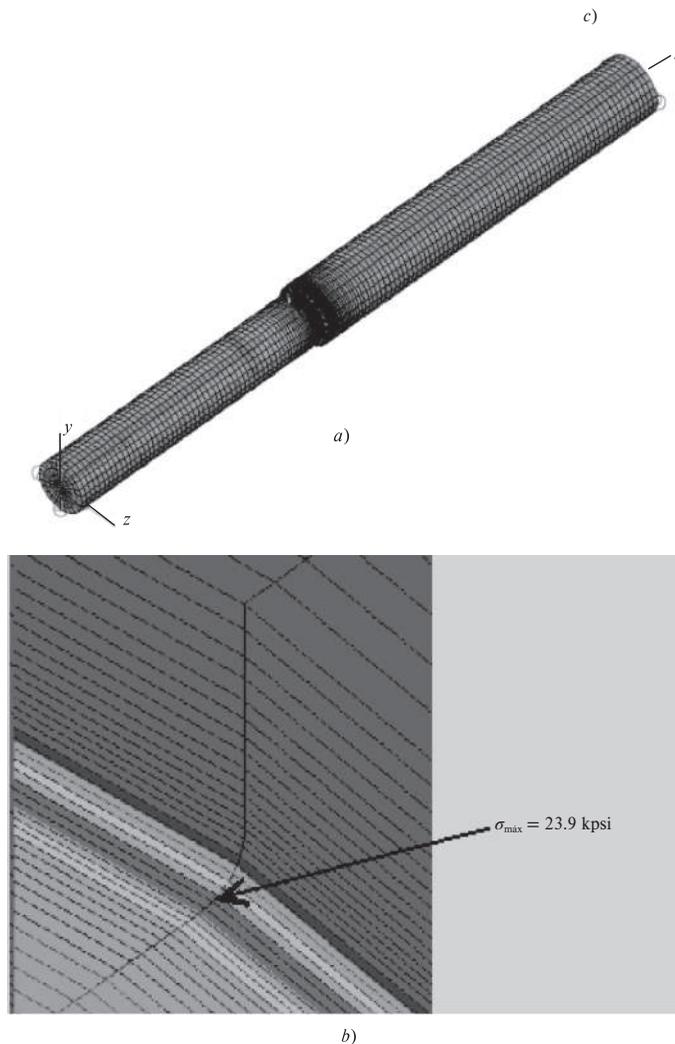
c) Resultados de desplazamiento del modelo del FEA.

Desplazamientos/rotaciones de nodos (grados)

Número de nodo	Traslación en x	Traslación en y	Traslación en z	Rotación θ_x (grados)	Rotación θ_y (grados)	Rotación θ_z (grados)
1	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	-9.7930 E - 02			
2	0.0000 E + 00	28.4951 E - 04	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	-9.6179 E - 02
3	0.0000 E + 00	29.3649 E - 03	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	-7.9874 E - 03
4	0.0000 E + 00	29.3870 E - 03	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	2.8492 E - 03
5	0.0000 E + 00	26.0507 E - 04	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	6.8558 E - 02
6	0.0000 E + 00	0.0000 E + 00	6.9725 E - 02			

Figura 19-8

a) Modelo sólido del eje escalonado del ejemplo 4-7 usando 56 384 elementos ladrillo y tetraedros, b) vista del contorno de esfuerzos en el escalón girado 180° alrededor del eje x, mostrando los máximos a tensión.



Si se recurre a otra fuente,¹³ el factor de concentración de esfuerzos resulta ser $K_t = 3.00$. La reacción en el soporte derecho es $R_F = (8/20)600 = 240$ lbf. El momento de flexión al principio del entalle es $M = 240(11.52) = 2765$ lbf · pulg = 2.765 kip · pulg. La predicción analítica del máximo esfuerzo es, entonces,

¹³Véase W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3a. Ed. John Wiley & Sons, Nueva York, 2008, Diagrama 3.11.

$$\sigma_{\max} = K_t \left(\frac{32M}{\pi d^3} \right) = 3.00 \left[\frac{32(2.765)}{\pi (1.5^3)} \right] = 25.03 \text{ kpsi}$$

El modelo de elemento finito es 4.5% inferior. Si se utilizaran más elementos en la región del entalle, los resultados indudablemente serían más detallados. Sin embargo, los resultados se encuentran dentro de la admisibilidad ingenieril.

Si deseamos verificar las deflexiones, compare los resultados con el modelo de viga de tres elementos, no con el modelo de cinco elementos. Esto se debe a que no se modelaron los escalones de cojinetes en el modelo sólido. La deflexión vertical, en $x = 8.5$ pulg, para el modelo sólido se calculó como -0.00981 pulg, 4.6% mayor en magnitud que las -0.00938 pulg del modelo de viga de tres elementos. Para pendientes, el elemento rectangular o paralelepípedo no soporta grados de libertad rotacionales, de manera que la rotación en los extremos tiene que calcularse a partir de los desplazamientos de nodos adyacentes en los extremos. Esto produce las pendientes en los extremos de $\theta_A = -0.103^\circ$ y $\theta_F = 0.0732^\circ$; estos son 6.7 y 6.6% mayores en magnitud que el modelo de viga de tres elementos, respectivamente. Sin embargo, el punto del ejercicio es que, si las deflexiones fueran el único resultado deseado, ¿cuál modelo se utilizaría?

Existen incontables situaciones de modelado que podrían examinarse. Se exhorta al lector a consultar la literatura y a leer detenidamente las guías disponibles en las distribuidoras de software.¹⁴

19-8 Esfuerzos térmicos

Se puede efectuar un análisis de transferencia de calor sobre un componente estructural que incluya los efectos de conducción, convección y/o radiación de calor. Después de que se completa el análisis de transferencia de calor, el mismo modelo se puede utilizar para determinar los esfuerzos térmicos resultantes. Mediante una sencilla ilustración se modela una placa de acero de 10 pulg \times 4 pulg, de 0.25 pulg de espesor con un orificio central de 1.0 pulg de diámetro. La placa es soportada como se ilustra en la figura 19-9a) y las temperaturas de los extremos se mantienen a 100°F y 0°F. Aparte de las paredes, todas las superficies se encuentran térmicamente aisladas. Antes de colocar la placa entre las paredes, su temperatura inicial fue de 0°F. El coeficiente térmico de expansión del acero es de $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{F}^{-1}$. La placa fue enmallada con 1 312 elementos bidimensionales, con la malla refinada a lo largo del borde del orificio. La figura 19-9b) ilustra los contornos de temperatura de la distribución de esta en estado estacionario que se obtuvo por medio del FEA. Mediante el uso de los mismos elementos que se emplean para llevar a cabo un análisis de esfuerzo lineal, donde las temperaturas se trasladaron del análisis de transferencia de calor, la figura 19-9c) muestra los contornos de esfuerzo resultantes. Como se esperaba, los esfuerzos compresivos máximos ocurren en la parte superior e inferior del orificio, con una magnitud de 31.9 kpsi.

19-9 Carga de pandeo crítica

Los elementos finitos pueden emplearse para predecir la *carga de pandeo crítica* de una estructura de paredes delgadas. Un ejemplo se ilustró en la figura 4-25 (p. 196). Otro ejemplo puede verse en la figura 19-10a), que es una lata de cerveza de aluminio de paredes delgadas. Se aplicó una presión específica a la superficie superior. Se limitó la traslación vertical de la parte inferior de la lata, así como la traslación en las tres direcciones del nodo central de la parte inferior de la lata y se limitó la traslación tangencial de un nodo externo sobre la lata. Esto evita el movimiento de cuerpo rígido y proporciona soporte vertical para la parte inferior de la lata con movimiento no restringido horizontal de su parte inferior. El software

¹⁴Véase, por ejemplo, R. D. Cook, *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, Wiley & Sons, Nueva York, 1995; y R. G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999, capítulo 10.

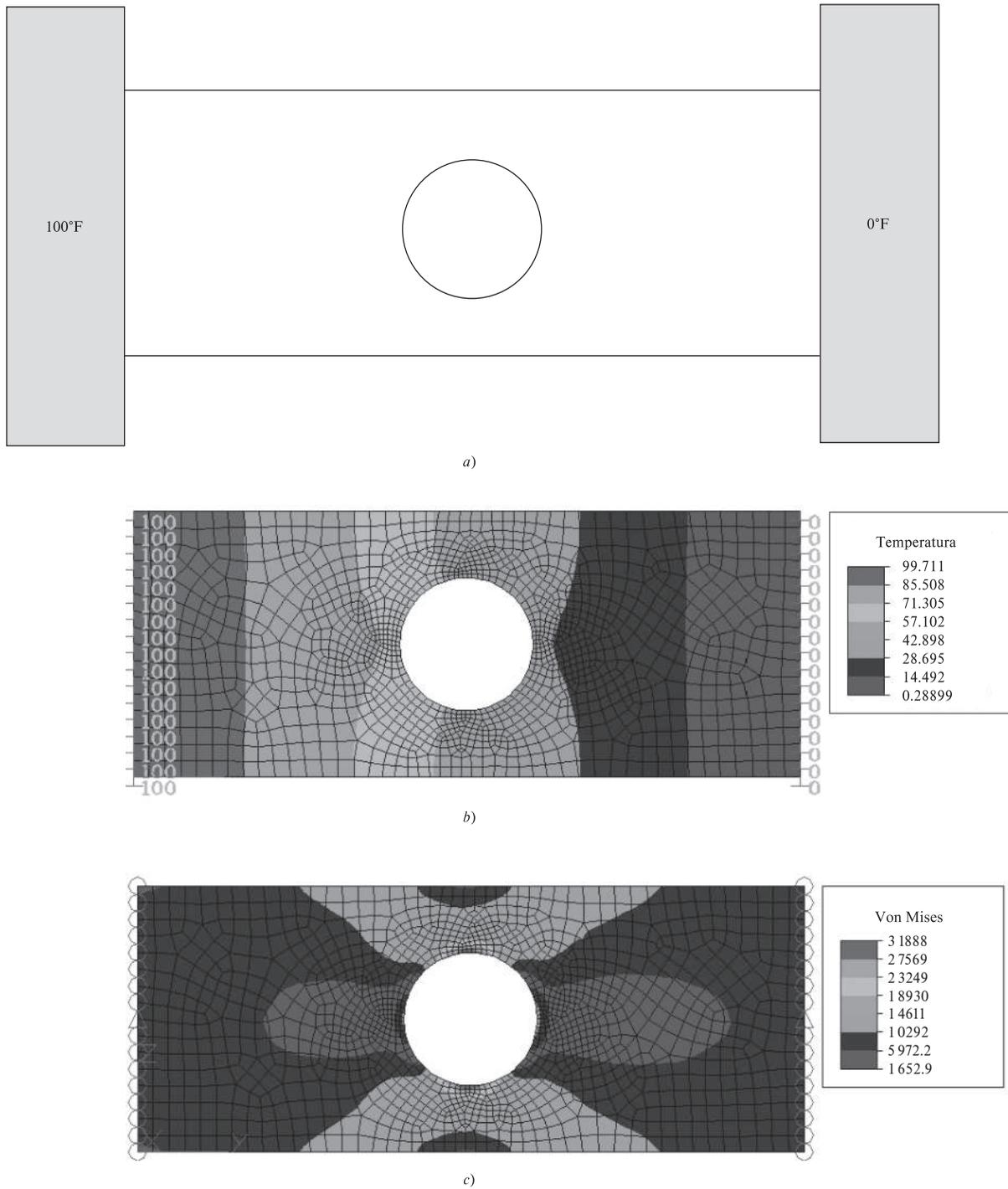


Figura 19-9

a) Placa soportada en los extremos que se mantiene a las temperaturas mostradas, b) contornos de temperatura en estado estable, c) contorno de esfuerzos térmicos de Von Mises donde la temperatura de la placa era de 0°F.

de elemento finito devuelve un valor del multiplicador de carga que, cuando se multiplica por la fuerza total aplicada, indica la carga de pandeo crítica. El análisis de pandeo es un problema de eigenvalores o valores propios, y un lector que repase un texto básico de mecánica de materiales encontrará que hay una forma de modo de deflexión asociada con la carga crítica. La forma de modo de pandeo de la lata de cerveza deformada se ilustra en la figura 19-10b).

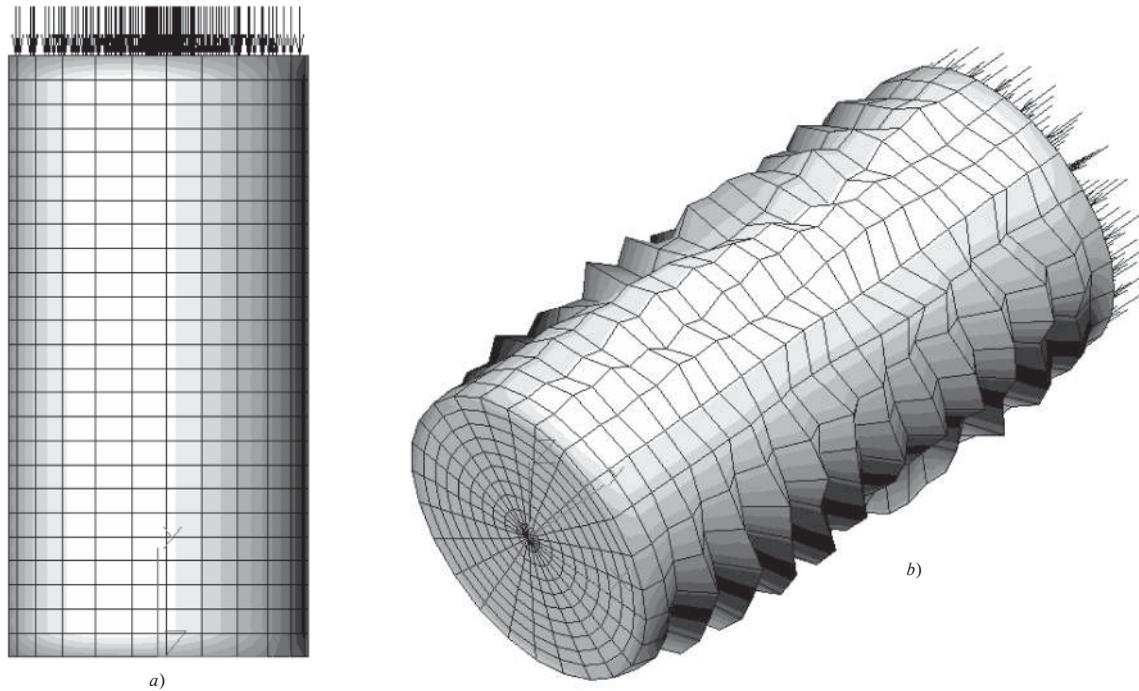


Figura 19-10

a) Envase de bebida de aluminio de pared delgada cargada verticalmente hacia abajo en la parte superior, *b)* vista isométrica de la lata pandeada (las deflexiones están exageradas).

19-10 Análisis de vibración

El ingeniero de diseño puede interesarse por la forma en que se comporta un componente en relación con la entrada dinámica, lo que produce vibración. Para la vibración, la mayor parte de los paquetes de elemento finito comienzan con un *análisis modal* del componente. Este enfoque proporciona las frecuencias naturales y formas de modo a las que el componente vibra naturalmente. Estas se conocen como los eigenvalores (valores propios) y eigenvectores (vectores propios) del componente. Acto seguido, esta solución puede transferirse (del mismo modo que para los esfuerzos térmicos) a módulos de solución (“solucionadores” o “solvers”) para realizar análisis de vibración forzada, como la respuesta a la frecuencia, impacto transitorio o vibración aleatoria, para apreciar cómo se comportan los modos del componente con respecto a la entrada dinámica. El análisis de forma de modo está principalmente basado en la rigidez y las deflexiones resultantes. De este modo, de manera semejante al análisis de esfuerzo estático, los modelos más simples bastarán. Sin embargo, si al resolver problemas de respuesta forzada se desea conocer los esfuerzos, se necesitará un modelo más detallado (similar a la ilustración del eje en la sección 19-7).

Se efectuó un análisis modal del modelo de viga sin los escalones de cojinetes, de un modelo de viga de 20 elementos,¹⁵ y el modelo de paralelepípedo y tetraedro de 56 384 elementos. No necesita mencionarse que el modelo de viga toma menos de 9 segundos para resolverse, mientras que para el modelo sólido se emplea un tiempo *considerablemente* más largo. El primer modo (fundamental) de vibración estaba curvado y ambos modelos se ilustran en la figura 19-11, junto con las frecuencias respectivas. La diferencia entre las frecuencias es de aproximadamente 1.9%. Observe además que la forma del modo es justamente eso, una forma. Las magnitudes reales de las deflexiones son desconocidas, pues solo se conocen sus valores relativos. De este modo, cualquier factor de escala puede emplearse para visualizar la forma de deflexión.

¹⁵Para análisis de deflexión estática, solamente fueron necesarios tres elementos de viga. No obstante, debido a la distribución de masa para el problema dinámico, son necesarios más elementos de viga.

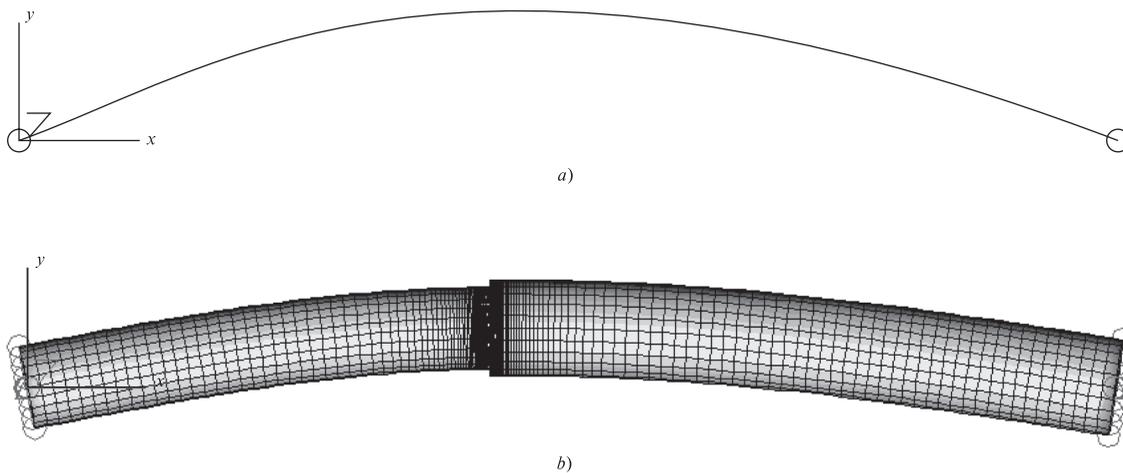


Figura 19-11

Primer modo de vibración de la viga escalonada. a) Modelo con 20 elementos viga, $f_1 = 322$ Hz; b) modelo con 56 384 elementos ladrillo y tetraedros $f_1 = 316$ Hz.

La convergencia del modelo de 20 elementos se verificó duplicando el número de elementos, lo que no produjo cambio alguno.

La figura 19-12 proporciona las frecuencias y formas del segundo modo.¹⁶ En este caso, la diferencia entre los modelos es de 3.6%.

Como se estableció con anterioridad, una vez que se obtienen las formas del modo, se puede determinar la respuesta de la estructura a varias cargas dinámicas, como entrada aleatoria, transitoria o armónica. Este resultado se consigue mediante el uso de formas de modo en conjunto con superposición modal. El método se denomina *análisis modal*.¹⁷

19-11 Resumen

Como se estableció en la sección 1-4, en la actualidad los ingenieros en diseño mecánico tienen muchas herramientas computacionales poderosas. El análisis de elemento finito es una de las más importantes y se integra fácilmente dentro del ambiente de la ingeniería asistida por computadora. El software de modelado sólido CAD proporciona una excelente plataforma para la creación fácil de modelos de FEA. En este capítulo se han descrito diversos tipos de análisis con base en algunos problemas ilustrativos bastante simples. No obstante, el propósito de este capítulo fue exponer algunas consideraciones básicas acerca de configuraciones de elementos de FEA, parámetros, consideraciones de modelado y solucionadores, y no necesariamente la descripción de situaciones geométricas complejas. La teoría y la aplicación del elemento finito es un tema muy amplio, y tomará años de experiencia antes de que llegue a ser entendido y especializado mediante la técnica. Existen muchas fuentes de información acerca del tema en diversos libros de texto; distribuidores de software de FEA (como ANSYS, MSC/NASTRAN y ALGOR) suministran casos de estudio, guías de usuario, boletines de grupos de usuarios, guías tutoriales, etc.; y en internet se proporcionan muchas fuentes. Las notas de pie de página 11, 12 y 14 hacen referencia a algunos textos sobre FEA. Referencias adicionales se mencionan a continuación.

¹⁶ Nota: Ambos modelos presentaron frecuencias repetidas y formas de modo para cada modo de flexión. Puesto que los soportes de cojinetes y viga (en condiciones de frontera) son simétricos con respecto al eje, los modos de flexión son los mismos en todos los planos transversales. Así, el segundo modo mostrado en la figura 19-12 es el siguiente modo sin repetición.

¹⁷ Véase S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 4a. ed., Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2010, sección 6.14.

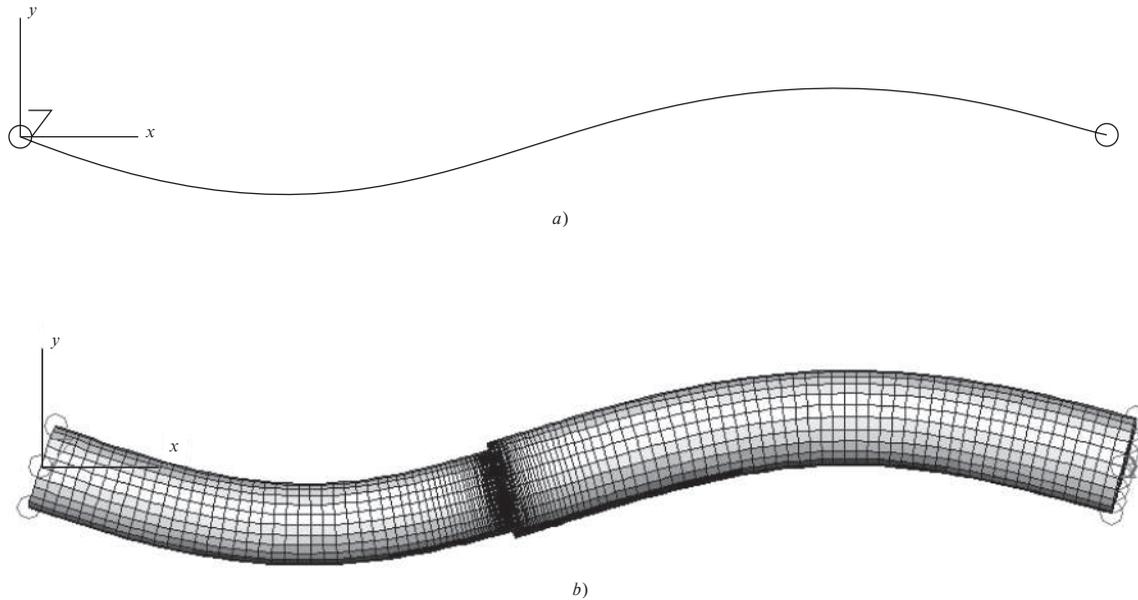


Figura 19-12

Segundo modo de vibración de la viga escalonada. a) Modelo con 20 elementos viga, $f_2 = 1\,296$ Hz; b) modelo con 56 384 elementos ladrillo y tetraedros, $f_2 = 1\,249$ Hz.

Referencias FEA adicionales

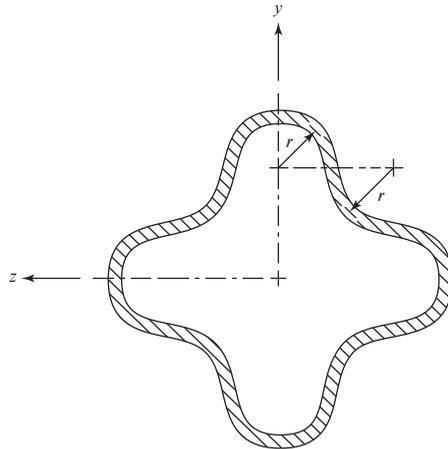
- K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
 R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha y R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2001.
 D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, 4a. ed., Nelson, una división de Thomson Canada Limited, Toronto, 2007.
 J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2002.
 O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4a. ed., vols. 1 y 2, McGraw-Hill, Nueva York, 1989 y 1991.

PROBLEMAS

Los siguientes problemas están pensados para ser resueltos por medio de FEA. Se recomienda que también los resuelva de manera analítica, que compare los dos resultados y explique cualquier diferencia.

- 19-1** Resuelva el ejemplo 3-6.
- 19-2** En el caso del ejemplo 3-10, aplique un par de torsión de $23\,730$ lbf · pulg, y determine el máximo esfuerzo cortante y ángulo de torsión. Utilice elementos de placa de $\frac{1}{8}$ pulgadas de espesor.
- 19-3** El tubo de acero con la sección transversal que se muestra transmite un momento de torsión de 100 N · m. El grosor de la pared del tubo es de 2.5 mm, todos los radios son $r = 6.25$ mm y el tubo tiene 500 mm de longitud. Para acero, sea $E = 207$ GPa y $\nu = 0.29$. Determine el esfuerzo cortante promedio en la pared y el ángulo de torsión sobre la longitud dada. Emplee elementos de placa de 2.5 mm de espesor.

Problema 19-3



- 19-4** En la figura A-15-1, sea $w = 2$ pulg, $d = 0.3$ pulg y estime K_t . Use simetría de $1/4$ y elementos bidimensionales de $1/8$ pulg de espesor.
- 19-5** En la figura A-15-3, sea $w = 1.5$ pulg, $d = 1.0$ pulg, $r = 0.10$ pulg y estime K_t . Use simetría de $1/4$ y elementos bidimensionales de $1/8$ pulg de espesor.
- 19-6** En la figura A-15-5, sea $D = 3$ pulg, $d = 2$ pulg, $r = 0.25$ pulg y estime K_t . Use simetría de $1/2$ y elementos bidimensionales de $1/8$ pulg de espesor.
- 19-7** Resuelva el problema 3-122 usando elementos sólidos. *Nota:* Se puede omitir la parte superior de la armella ubicada arriba de la fuerza aplicada.
- 19-8** Resuelva el problema 3-132 usando elementos sólidos. *Nota:* Como hay un plano de simetría, puede construirse una mitad del modelo. Sin embargo, debe tenerse mucho cuidado para limitar el plano de simetría adecuadamente a fin de asegurar la simetría sin restricciones exageradas.
- 19-9** Resuelva el ejemplo 4-11, con $F = 10$ lbf, $d = 1/8$ pulg, $a = 0.5$ pulg, $b = 1$ pulg, $c = 2$ pulg, $E = 30$ Mpsi y $\nu = 0.29$, usando elementos de viga.
- 19-10** Resuelva el ejemplo 4-13 modelando la figura 4-14b) con elementos bidimensionales de 2 pulg de espesor. Puesto que este ejemplo utiliza simetría, tenga cuidado para restringir las condiciones de frontera de la superficie horizontal inferior de manera apropiada.
- 19-11** Resuelva el problema 4-12 utilizando elementos de viga.
- 19-12** Resuelva el problema 4-47 usando elementos de viga. Elija un diámetro, y resuelva para las pendientes. Posteriormente, utilice la ecuación (7-18), página 356, para reajustar el diámetro. Utilice el nuevo diámetro con fines de verificación.
- 19-13** Resuelva el problema 4-63 usando elementos de viga.
- 19-14** Resuelva el problema 4-78 empleando elementos de viga. Utilice la mitad de un modelo aprovechando la simetría. Tenga cuidado de limitar el plano de simetría en forma adecuada a fin de asegurar la simetría sin restricciones exageradas.
- 19-15** Resuelva el problema 4-79 usando elementos de viga. Utilice la mitad de un modelo aprovechando la simetría. En el plano de simetría, restrinja tanto la traslación como la rotación.
- 19-16** Resuelva el problema 4-80 usando elementos de viga. Modele el problema de dos maneras: a) Modele por completo la forma de alambre utilizando 200 elementos. b) Modele la mitad de la forma de alambre empleando 100 elementos y la simetría. Es decir, modele la forma desde el punto A hasta el punto C.

Aplique la mitad de la fuerza en la parte superior y restrinja la parte superior horizontalmente, así como la rotación en el plano.

19-17 Resuelva el problema 4-88 usando elementos de viga.

19-18 Resuelva el problema 10-42 usando elementos de viga.

19-19 Un cilindro de aluminio ($E_a = 70 \text{ MPa}$, $\nu_a = 0.33$) con un diámetro externo de 150 mm y un diámetro interno de 100 mm se ajustará a presión sobre un cilindro de acero inoxidable ($E_s = 190 \text{ MPa}$, $\nu_s = 0.30$) con un diámetro externo de 100.20 mm y un diámetro interno de 50 mm. Determine *a*) la presión p de interfaz y *b*) los esfuerzos tangenciales máximos en los cilindros.

Nota: Resuelva el problema del ajuste de presión utilizando el procedimiento que sigue. Emplee el elemento bidimensional de esfuerzo plano; utilizando simetría, cree un modelo dividido en cuatro que enmalle elementos en las direcciones radial y tangencial. Los elementos de cada cilindro deberían asignarse a sus propiedades materiales únicas. La interfaz entre los dos cilindros debería tener nodos comunes. Para simular el ajuste a presión, el cilindro interno debe ser forzado a expandirse térmicamente. Asigne un coeficiente de expansión e incremento de temperatura, α y ΔT , respectivamente, al cilindro interno. Haga esto de acuerdo a la relación $\delta = \alpha \Delta T b$, donde δ y b son la interferencia radial y el radio exterior del miembro interno, respectivamente. Los nodos a lo largo de los bordes rectos del modelo de cuartos deberían fijarse en las direcciones tangenciales, y libres para deflectarse en la dirección radial.

