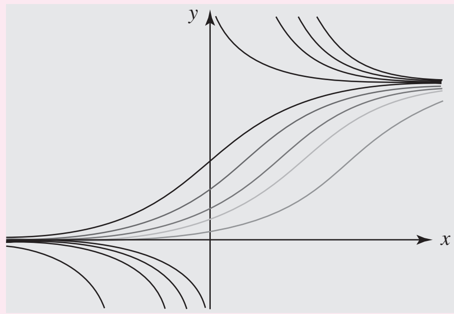
Unidad 1

Los números reales



En esta unidad Una de las herramientas más poderosas de las matemáticas es el cálculo. Su evolución ha ocurrido de manera paralela a los diferentes sistemas numéricos, desde los primeros conteos hasta la era tecnológica. El cálculo fundamenta su estudio en las propiedades de los números reales. En esta unidad estudiaremos los axiomas fundamentales, los de orden y los de completitud como preámbulo para otras aplicaciones más complejas.

Competencia específica

Comprender las propiedades de los números reales para resolver desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita y desigualdades con valor absoluto, representando las soluciones en la recta numérica real.

1.1 Los números reales

Hoy en día la ciencia y la tecnología han alcanzado niveles extraordinarios. El desarrollo de la física, la química, la biología, la astronomía, la medicina, la ingeniería y muchas ramas más, fundamentan su progreso en la aplicación de una de las herramientas más poderosas de las matemáticas: el *cálculo infinitesimal*.

En términos históricos el desarrollo del cálculo se produjo al buscar soluciones a problemas de la vida real, entre los más conocidos podemos mencionar:

- Describir la velocidad de una partícula con velocidad constante.
- Determinar la ecuación de la tangente a una curva en un punto.
- Analizar la razón de cambio entre dos variables.
- Calcular el área de una superficie y el volumen de un sólido.

El cálculo sustenta su estudio en el conjunto de los números reales, por esta razón es necesario conocer sus axiomas y sus principales propiedades.

Existen diversas maneras de iniciar el estudio del sistema de los números reales, pero una de las más utilizadas considera los sistemas numéricos más sencillos, el primero de ellos es el conjunto de los *números naturales*.

Definición del conjunto de números naturales

El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$, y se define como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Una de las primeras aplicaciones de las matemáticas en la vida real ha sido el conteo y los números naturales han sido la herramienta. Entre las propiedades más importantes de este conjunto podemos mencionar la existencia de un orden, la existencia del 1 como primer elemento, que todo número natural tiene otro como sucesor y que todo número natural, excepto el número 1, tiene otro número natural como antecesor. En términos formales se tiene:

Propiedades de los números naturales

1. $1 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $k \in \mathbb{N}$ se define su sucesor como $k + 1$ y además $k + 1 \in \mathbb{N}$.
3. Si $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, se define su antecesor como $k - 1$ y además $k + 1 \in \mathbb{N}$.

En $\mathbb{N}$ se definen dos operaciones: la suma y el producto. Se verifica que ambas operaciones son cerradas, conmutativas y asociativas, la suma distribuye respecto al producto. El número natural 1 es el neutro multiplicativo. Sin embargo, estas propiedades no son suficientes para describir algunos fenómenos físicos, por ejemplo, las temperaturas bajo cero, las altitudes por debajo del mar o la distancia entre dos puntos iguales; en concreto, carecen de un elemento neutro aditivo y de inversos aditivos.

Los números naturales están contenidos en los números enteros $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Un conjunto "más grande" que resuelve este inconveniente se define como el conjunto de los números enteros.

Definición del conjunto de los números enteros

Se define el conjunto de los números enteros como

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

La resta de dos números es una operación derivada de la suma, y se define como la suma de un número con el inverso aditivo de otro.

En $\mathbb{Z}$ también están definidas las operaciones de suma y producto que son, de nueva cuenta, cerradas, conmutativas y asociativas, también se verifica la propiedad distributiva de la suma, existe el elemento neutro multiplicativo, pero además se agregan el "cero" como elemento neutro aditivo y los "números negativos" como inversos aditivos. Estas propiedades permiten la definición de la resta como una operación derivada de sumar un número con el inverso aditivo de otro, es decir $x - y = x + (-y)$.

No obstante lo anterior, la solución a problemas elementales como repartir una naranja entre dos personas o describir qué parte representa un minuto de una hora, o simplemente para dar el resultado exacto de dividir 46 dulces entre 5 niños, no pueden resolverse en términos de números naturales ni de números enteros. Se hace necesaria, entonces, la introducción de los números fraccionarios, también conocidos como los números racionales que tienen otras propiedades de mayor aplicación.

La definición antigua de la unidad fundamental de longitud, como la diezmillonésima parte del meridiano terrestre a lo largo de un cuadrante, es un ejemplo de número racional.

Definición del conjunto de los números racionales

Se define el conjunto de los números racionales como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

EJEMPLO 1 Algunos números racionales

Los siguientes son ejemplos de números racionales.

La letra $\mathbb{Q}$ se tomó originalmente de la palabra “cociente” en inglés.

1. $\frac{1}{5}, \frac{4}{9}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{3}{11}, \frac{4}{-13}$
2. Cualquier número natural.
3. Cualquier número entero.
4. Cualquier expansión decimal finita como 0.25, 3.1, −7.05, 1.1
5. Cualquier expansión decimal infinita periódica, por ejemplo

   $3.\overline{4} = 3.44444444444\ldots$, $-52.\overline{04} = -52.040404040404\ldots$.

   $5.\overline{123} = 5.123123123\ldots$ (la línea arriba de los dígitos indica que se repiten infinitamente).

Los números racionales históricamente se definen como cocientes de números enteros, la condición es que el denominador sea diferente de cero. Dado que todo número entero n puede expresarse como el cociente $\frac{n}{1}$, entonces se considera que todo número entero es un número racional. Es decir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Todo número entero puede expresarse como el cociente de él mismo y del 1, de manera que todo entero es un número racional.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Todas las propiedades de los enteros siguen siendo válidas en $\mathbb{Q}$, pero además se verifica la existencia de los inversos multiplicativos para cualquier número racional, excepto el cero. Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ el inverso multiplicativo se define por $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ y satisface $\frac{a}{b}\,\frac{b}{a} = 1$. Se define la división de dos números como el producto de uno por el inverso de otro distinto de cero, esto es $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \neq 0$, se define el inverso multiplicativo $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ y satisface $\frac{a}{b}\,\frac{b}{a} = 1$.

Dado un número racional $\frac{a}{b}$ es posible realizar la división de a entre b, para obtener como resultado un número decimal. El teorema 1.1.1, presentado sin demostración, expresa las opciones de este resultado.

Teorema 1.1.1 Todo número racional puede expresarse como una expansión decimal finita o como una expansión decimal infinita periódica.

EJEMPLO 2 Una expansión decimal finita es un número racional

Demostrar que la expansión decimal 0.14 es un número racional.

Solución

Si $x = 0.14$, entonces

$x = 0.14$ ← multiplicar por 10^2

$100x = 14$ ← despejar

$$x = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$ ■

EJEMPLO 3 Otra expansión decimal finita que es un número racional

Demostrar que la expansión decimal 0.2124 es un número racional.

Solución

Si $x = 0.2124$, entonces

$x = 0.2124$ ← multiplicar por 10^4

$10\,000x = 2\,124$ ← despejar

$$x = \frac{2\,124}{10\,000} = \frac{531}{2\,500}$$ ■

En general, dada la expansión decimal finita $0.a_1a_2a_3\ldots a_n$ se supone

$x = 0.a_1a_2a_3\ldots a_n$ ← multiplicar por 10^n

$10^n x = a_1a_2a_3\ldots a_n$ ← despejar x

$$x = \frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n}$$ ■

EJEMPLO 4 Una expansión decimal infinita periódica es un número racional

Demostrar que la expansión decimal infinita $0.543543543543\ldots = 0.\overline{543}$ es un número racional.

Solución

Sea $x = 0.\overline{543} = 0.543543543543\ldots$, entonces

$x = 0.543543543543\ldots$ ← multiplicar por 10^3

$10^3x = 543.543543543543\ldots$ ← restar a esta nueva expresión la anterior

$$\begin{array}{r} 10^3x = 543.543543543543\ldots \\ x = 0.543543543543\ldots \\ \hline 999x = 543 \end{array}$$ ← despejar

$$x = \frac{543}{999}$$ ■

EJEMPLO 5 Una expansión decimal infinita periódica es un número racional

Demostrar que la expansión decimal infinita $0.1241414141\ldots = 0.12\overline{41}$ es un número racional.

Solución

Sea $x = 0.12\overline{41} = 0.1241414141\ldots$, entonces

$x = 0.1241414141\ldots$ ← multiplicar por 10^4 y por 10^2

$10^4x = 1\,241.41414141\ldots$

$10^2x = 12.41414141\ldots$ ← restar estas ecuaciones

$$
\begin{aligned}
10^4 x &= 1241.41414141\ldots \\
10^2 x &= 12.41414141\ldots \quad \leftarrow \text{despejar} \\
\hline
9\,900x &= 1\,229 \\
x &= \frac{1\,229}{9\,900}
\end{aligned}
$$

Dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible determinar un nuevo número racional comprendido entre ellos, esto puede realizarse tantas veces como se desee; por ejemplo, entre los racionales m y n se encuentra el número racional $(m+n)/2$. Sin embargo, los números racionales no "llenan" toda la recta numérica.

Al intentar responder preguntas como: ¿cuál es la longitud de la arista de un cuadrado que tiene área 2? o ¿cuál es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su radio?, encontramos que las respuestas $\sqrt{2}$ y π, respectivamente, no pueden expresarse como un número racional (vea los problemas 23 y 24 de la sección 1.4). Números de este tipo se conocen como irracionales y gráficamente se "intercalan" en toda la recta numérica en los "huecos" que existen entre los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$.

Una de las primeras aplicaciones de los números racionales fue construir números irracionales, esto después de un sofisticado proceso.

La necesidad de utilizar números irracionales se presentó en algunos problemas de geometría en la Grecia antigua; sin embargo, fue hasta el siglo XIX que se obtuvieron avances significativos gracias a los estudios realizados por Karl Weierstrass, George Cantor y Richard Dedekin. La construcción total se dio a partir de los axiomas que estableció Giuseppe Peano en 1889.

Los números irracionales son todos aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, o bien como aquellos números que tienen una expansión decimal *infinita no periódica*. En ocasiones basta entender que los irracionales son un conjunto disjunto de los racionales.

Definición del conjunto de números irracionales

Se define el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ como el conjunto de todos los números que no son racionales.

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ es una expansión decimal infinita no periódica}\}$$

EJEMPLO 6 Algunos números irracionales

Algunos números irracionales son:

1. e
2. π
3. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt{p}$, con p número primo.
5. $a+\sqrt{p}$, si a es un número racional y p un número primo.

EJEMPLO 7 Otros números irracionales

Un número primo sólo es divisible por él mismo y por la unidad, los números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, . . . El número $\sqrt{p}$ es irracional siempre que p sea un número primo.

Se deja como ejercicio al lector determinar cuáles propiedades de los racionales se satisfacen para los irracionales. No todas las propiedades siguen siendo válidas; por ejemplo, podemos mencionar que la suma no es cerrada, basta considerar que $-2+\pi$ y $7-\pi$ son dos números irracionales que sumados resultan un número entero.

Ya estamos en condiciones de obtener la definición de un conjunto más general, el conjunto de los números reales.

Definición del conjunto de números reales

Se define al conjunto de los números reales como la unión disjunta de números racionales e irracionales. Es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Es importante observar que los racionales y los irracionales son conjuntos disjuntos, esto es, que dado un número real o está en $\mathbb{Q}$ o está en $\mathbb{I}$ pero nunca en ambos. Además se verifican las contenciones propias

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

1.2 Los números reales y la recta numérica

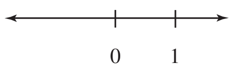


FIGURA 1.2.1 La recta real

Los números reales se pueden representar gráficamente como puntos sobre una línea recta conocida como la *recta real*. Sobre esta recta se fijan dos puntos representados por 0 y 1. Estos dos puntos permiten construir todos los demás, ya que para representar cualquier número real x se toma un segmento de longitud x a la derecha del cero si x es positivo o a la izquierda si x es negativo.

El extremo de este segmento es el punto correspondiente al número x. El cero se conoce como origen de la recta real y el 1 como la escala. Por lo anterior, sobre la recta real se representan los reales positivos, el cero y los reales negativos, y se verifica una regla de correspondencia: cada punto de la recta corresponde a un número real y cada número real lo podemos representar como un punto de esta recta. La recta real se muestra en la FIGURA 1.2.1.

Los números definidos a la derecha del cero se conocen como reales positivos y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. De manera análoga, se define $\mathbb{R}^-$ como el conjunto de todos los reales a la izquierda del cero.

El conjunto de los números reales es un conjunto denso.

Otra propiedad importante de los números reales es que entre dos números reales diferentes cualesquiera, sin importar cuán cercanos estén, siempre existe otro número real y, en consecuencia, entre dos números reales cualesquiera diferentes, siempre existe una infinidad de números reales. A diferencia de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$ los reales no contienen "huecos". En términos matemáticos se dice que el conjunto de los números reales es un *conjunto denso*.

1.3 Propiedades de los números reales

El sistema de los números reales es uno de los pilares fundamentales en el desarrollo de las matemáticas a cualquier nivel, existen muchos resultados que muestran su importancia histórica. No obstante, la presente obra no realiza un estudio más profundo de este conjunto numérico y simplemente se establece el conjunto de axiomas a partir de los cuales se derivan todas las propiedades utilizadas en un curso básico de cálculo.

Axiomas de los números reales

Dados dos números reales cualesquiera x y y se define la suma $x + y \in \mathbb{R}$ y el producto $xy \in \mathbb{R}$, que satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1 Propiedad conmutativa de la suma

$$x + y = y + x$$

Axioma 2 Propiedad asociativa de la suma

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Axioma 3 Existencia del neutro aditivo

$$\text{Existe el } 0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + 0 = x.$$

Axioma 4 Existencia de inversos aditivos

Para todo número real x existe $-x \in \mathbb{R}$, tal que $x + (-x) = 0$.

Axioma 5 Propiedad conmutativa del producto

$$xy = yx$$

Axioma 6 Propiedad asociativa del producto

$$x(yz) = (xy)z$$

Axioma 7 Existencia del neutro multiplicativo

Existe el $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = x$.

Axioma 8 Existencia de inversos aditivos

Para todo número real distinto de cero x existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Axioma 9 Propiedad distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

Todas las propiedades conocidas de los números reales pueden demostrarse a partir de los axiomas anteriores, por esta razón se dice que la teoría de los números reales es una *teoría axiomática*.

La teoría de los números reales es una teoría axiomática.

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

Si existiera la división entre 0 . . .

¿En dónde está el error del siguiente desarrollo?

Supongamos que es un número real **distinto** de cero.

Entonces sea	$x = y \neq 0$
Multiplicar la ecuación por x	$x^2 = xy$
Restar y^2 en ambos lados	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
Factorizar	$(x + y)(x - y) = y(x - y)$
Despejar	$\dfrac{(x + y)(x - y)}{(x - y)} = y$
Cancelar	$\dfrac{(x + y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} = y$
	$x + y = y$
Y como inicialmente $x = y$	$y + y = y$
Se tiene	$2y = y \quad \Rightarrow \quad 2 = \dfrac{y}{y} = 1 \quad ?$

¿Qué ocurrió?

Los axiomas de los números reales permiten definir operaciones complementarias como la diferencia de dos números y el cociente de dos números.

Definición de resta y división de números reales

Se define la resta y la división de números reales como sigue:

a) $x - y = x + (-y)$

b) $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$, siempre que $y \neq 0$

Propiedades de orden de los números reales

En los números reales se define una relación de orden $<$, que satisface los siguientes axiomas:

Axiomas de orden en $\mathbb{R}$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

Ley de tricotomía:
Dados dos números reales cualesquiera uno es mayor que otro o son iguales.

Axioma 10 Ley de tricotomía
Se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Nota: $x > y$ significa $y < x$

Axioma 11 Si $y < x$, entonces $y + z < x + z$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$

Axioma 12 Si $0 < y$ y $0 < x$, entonces $0 < xy$

Axioma 13 Propiedad de transitividad

Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$

Definición de los símbolos de desigualdad estricta $<$ y $>$

Los símbolos $<$ y $>$ se conocen como símbolos de desigualdad estricta y se leen "menor que" y "mayor que".

Definición de los símbolos de desigualdad no estricta $\leq$ y $\geq$

Los símbolos $\leq$ y $\geq$ se conocen como símbolos de desigualdad no estricta y se leen "menor o igual que" y "mayor o igual que".

La expresión $y \leq x$ abrevia los casos $y < x$ o $y = x$.

La expresión $y \geq x$ abrevia los casos $y > x$ o $y = x$.

En el teorema 1.3.1 se muestran otras propiedades de orden.

Teorema 1.3.1 Otras propiedades de orden

1. Si $y < x$ y $0 < z$, entonces $yz < xz$
2. Si $y < x$ y $z < 0$, entonces $yz > xz$
3. Si $0 < x$ y $0 < y$, entonces $0 < x + y$
4. Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $y + w < x + z$
5. Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $yw < xz$

DEMOSTRACIÓN 1 Si $y < x$, entonces por el axioma 11 $y - y < x - y$, es decir, $0 < x - y$, y si $0 < z$ por el axioma 12 se cumple $0 < (x - y)z$, luego $0 < xz - yz$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos $yz < xz - yz + yz$, donde finalmente $yz < xz$. ■

DEMOSTRACIÓN 2 Si $y < x$ y $z < 0$, entonces $0 < x - y$ y $0 < -z$, por el axioma 12 se cumple $0 < (x - y)(-z)$, luego $0 < -xz + yz$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos $xz < yz$. ■

DEMOSTRACIÓN 3 Si $0 < x$ y $0 < y$, entonces por el axioma 11 si $0 < x$ y $0 + x < x + y$,

por tricotomía (axioma 10) se tiene $0 < x + y$. ■

DEMOSTRACIÓN 4 Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $0 < x - y$ y $0 < z - w$, por el inciso 3 de este teorema se tiene $0 < (x - y) + (z - w)$ luego $0 < x + z - (y + w)$. Por último $y + w < x + z$. ■

DEMOSTRACIÓN 5 Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $yw < xw$ y $wx < xz$. Por tricotomía se concluye la demostración. ■

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado

Los axiomas de orden inducen de manera natural un orden en el conjunto de los números reales, y se tiene la siguiente convención:

1. $y < x$ si y sólo si $0 < x - y$
2. $y = x$ si y sólo si $0 = x - y$
3. $y \leq x$ si y sólo si $0 \leq x - y$

En la recta real la desigualdad $y < x$ se representa como un número y a la izquierda de un número x (FIGURA 1.3.1).

FIGURA 1.3.1 Representación gráfica de $y < x$.

En otras palabras, se dice que un número x es mayor que otro número y si y sólo si la diferencia $x - y$ es un número real positivo. De la misma manera se dice que un número x es menor que otro número y si y sólo si la diferencia $x - y$ es un número real negativo. Se dice que los números son iguales si la diferencia $x - y$ es cero.

Lo anterior define un orden de manera natural en el conjunto de los números reales, porque para saber cuál es la ubicación correcta de un número basta compararlo con el cero.

Ínfimo y supremo

Introducimos las siguientes cuatro definiciones antes de presentar un último axioma de los números reales que estudiaremos en esta sección:

Definición de cota superior Sea $A \subset \mathbb{R}$, si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ para todo $a \in A$, entonces x se llama una *cota superior* de A y se dice que el conjunto A está acotado *por arriba* o que A está acotado *superiormente*.

Definición de cota inferior Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < a$ para todo $a \in A$, entonces x se llama una *cota inferior* de A y se dice que el conjunto A está acotado por abajo o que A está acotado *inferiormente*.

Definición de supremo de un conjunto Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado por arriba y supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- x es una cota superior de A.
- Si $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A, entonces $x \leq y$.

Entonces x se dice el *supremo* de A y tiene la propiedad de ser “la menor de todas las cotas superiores”.

Si existen, el ínfimo y el supremo de un conjunto son únicos.

Definición de ínfimo de un conjunto Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado por abajo y supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- x es una cota inferior de A.
- Si $y \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, entonces $y \leq x$.

Entonces x se dice el ínfimo de A y tiene la propiedad de ser "la mayor de todas las cotas inferiores".

Ya se tienen las condiciones para poder enunciar un último axioma de los números reales, conocido como el *axioma de complitud* o de *completitud*:

Axioma de completitud

Axioma 14 Axioma de completitud

1. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por arriba tiene un supremo.
2. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por abajo tiene un ínfimo.

Los números reales forman un conjunto denso.

Como un conjunto de números reales puede constar de un solo número real, se verifica por el axioma 14 que los reales son densos.

1.4 Intervalos en $\mathbb{R}$

Al utilizar una variable en cualquier problema de aplicación es necesario definir el subconjunto de números reales que le corresponde como conjunto de sustitución. Sin lugar a dudas, unos de los subconjuntos más importantes en $\mathbb{R}$ son los intervalos y son definidos a continuación:

Definición de intervalo en $\mathbb{R}$

Se definen los siguientes subconjuntos de números reales, conocidos como intervalos reales:

1. Intervalo abierto	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
2. Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
3. Intervalos mixtos	$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$
	$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
4. Intervalos infinitos	$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$
	$(-\infty, b) = \{x \mid x \leq b\}$
	$[a, \infty) = \{x \mid a < x\}$
	$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$
5. Los números reales	$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

En la FIGURA 1.4.1 se pueden observar las representaciones gráficas de los diferentes tipos de intervalos. Algunos autores denotan los extremos de un intervalo abierto con puntos "huecos" y los extremos de un intervalo cerrado con puntos "sólidos".

EJEMPLO 8 Operaciones con intervalos

Determine el conjunto de números reales definido por $(-2, 16] \cap [12, 20)$ y por $(-2, 16] \cup [12, 20)$.

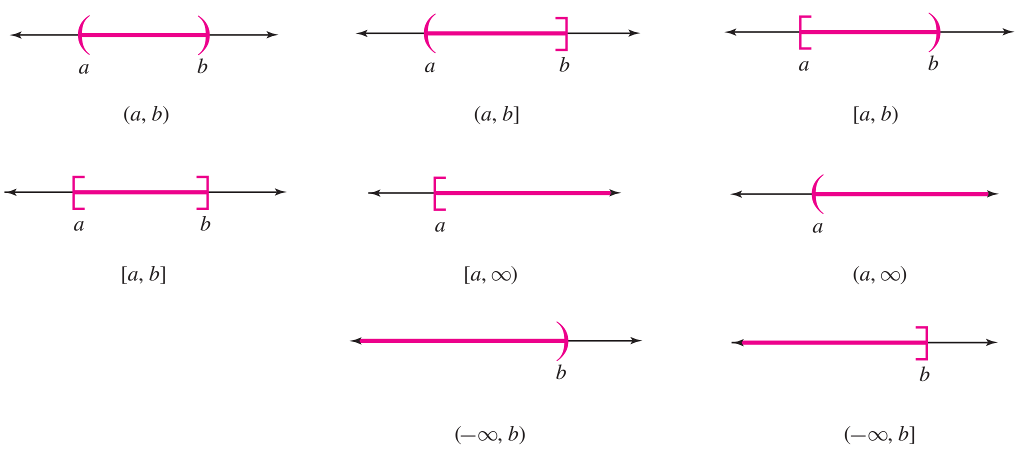


FIGURA 1.4.1 Intervalos reales

Solución Los intervalos son conjuntos, de manera que al utilizar operaciones de conjuntos, se tiene:

$$(-2,\ 16] \cap [12,\ 20) = \{x|-2 < x \le 16\} \cap \{x|\ 12 \le x < 20\} = \{x|\ 12 \le x \le 16\} = [12,\ 16]$$

$$(-2,\ 16] \cup [12,\ 20) = \{x|-2 < x \le 16\} \cup \{x|\ 12 \le x < 20\} = \{x|-2 < x < 20\} = (-2,\ 20)$$

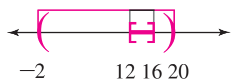


FIGURA 1.4.2

Los resultados gráficos se observan en la FIGURA 1.4.2. ■

1.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

1. Demuestre que la división entre cero no existe.

En los ejercicios 2 a 9 exprese los racionales dados en forma decimal.

2. $\frac{5}{6}$ **3.** $\frac{21}{4}$

4. $\frac{14}{3}$ **5.** $-\frac{4}{17}$

6. $\frac{11}{14}$ **7.** $\frac{123}{100}$

8. $\frac{32}{41}$ **9.** $\frac{1}{20}$

En los ejercicios 10 a 21 escriba los números decimales dados, si es posible, en forma de fracción.

10. 0.123321123321 . . . **11.** 3.141615

12. 0.12121212121 . . . **13.** 0.25555555 . . .

14. 2.213213 **15.** 5.71715

16. 0.0144444 . . . **17.** 0.0134134134 . . .

18. 1.3132313231 . . . **19.** 0.123123123123 . . .

20. 0.123456789123456 . . . **21.** 4.022022022 . . .

22. Determine el menor natural, el menor entero positivo, el menor racional positivo y el menor irracional positivo.

23. Demuestre que π es irracional.

24. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

25. Demuestre que la raíz cuadrada de un número primo es irracional.

26. Determine un racional que aproxime a π.

27. Demuestre que si $x,\ y \in \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{Q}$.

28. Justificar si la suma de dos irracionales es un irracional.

29. Demuestre que si $x,\ z \in \mathbb{Q}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < z$.

30. Demuestre que si $x,\ z \in \mathbb{I}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{I}$ tal que $x < y < z$.

31. Demuestre que si $x,\ z \in \mathbb{R}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y < z$.

32. Dados $x,\ y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ ordenar los números x, y, $\sqrt{xy}$, $\frac{x+y}{2}$.

En los ejercicios 33 a 38 determine si el resultado es un número racional o irracional.

33. $(\sqrt{3} + 1)^2$ **34.** $(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 4)$

35. $\sqrt{\pi}$ **36.** $(\sqrt{\pi} + \pi)^2$

37. π^2 **38.** $(1 + \sqrt{5})^4$

39. Demuestre que si x y y son dos números pares, entonces xy es otro número par.

40. Demuestre que si x y y son dos números impares, entonces xy es otro número impar.

41. Demuestre que el cuadrado de un número par es otro número par.

42. Demuestre que el cuadrado de un número impar es otro número impar.

43. Demuestre que si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{I}$, entonces $xy \in \mathbb{I}$.

En los ejercicios 44 a 51 determine si existen el ínfimo y el supremo para cada uno de los conjuntos dados.

44. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

45. $A = \{0, 4, 0, 49, 0.499, \ldots\}$

46. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

47. $A = \{1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots\}$

48. $A = \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots\}$

49. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

50. $A = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}\}$

51. $A = \{x | x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

En los ejercicios 52 a 59 represente gráficamente cada uno de los intervalos dados.

52. $(3, 8)$ **53.** $(-10, -2]$

54. $[1, 6.5]$ **55.** $[-2, 14)$

56. $(-\infty, -1)$ **57.** $(-\infty, 0]$

58. $(1, \infty)$ **59.** $[-9, \infty)$

En los ejercicios 60 a 72, realice las operaciones con intervalos indicadas.

60. $(2, 12] \cup (-7, 8)$ **61.** $(-\infty, 2] \cup (-4, 10)$

62. $(-\infty, 5] \cup (2, \infty)$ **63.** $(-9, 9] \cap (-3, 3)$

64. $\big[[0, 2] \cap (-2, 1]\big]^c$ **65.** $(-\infty, 1) \cap (-4, 10]$

66. $\big((1, 9] \cup (-2, 4)\big) \cap [0, 2)$

67. $\big((1, 3] \cap (-4, 0)\big)^c$ **68.** $[-5, \infty] - (4, 12)$

69. $\mathbb{R} - \big((1, 5] \cup (-1, 8)\big)$ **70.** $\mathbb{R} - (-\infty, 3)$

71. $\big((0, 4] \cup (-3, 3)\big) - [2, 5)$

72. $\big((-8, 4] \cup (-3, 1)\big) \cap [2, 6)$

1.5 Desigualdades y valor absoluto

En esta sección estudiaremos dos conceptos fundamentales en el cálculo infinitesimal, el concepto de desigualdad (o inecuación) y el concepto de valor absoluto.

Definición de desigualdad en una variable

Una desigualdad en una variable es una expresión de la forma $f(x)\ \Delta\ 0$, donde Δ es alguna de las relaciones de orden $<, >, \leq, \geq$.

Por resolver una desigualdad se entiende determinar el intervalo o combinación de intervalos (de números reales) cuyos elementos satisfacen la desigualdad.

Para resolver una desigualdad se utilizan los axiomas de los números reales como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $2x + 4 < 6x + 1$

Solución

$2x + 4 < 6x + 1$	Por el axioma 11, restar 1
$2x + 4 - 1 < 6x + 1 - 1$	Simplificar
$2x + 3 < 6x$	Por el axioma 11, restar $2x$
$2x - 2x + 3 < 6x - 2x$	Simplificar
$3 < 4x$	Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por $\frac{1}{4}$
$\left(\frac{1}{4}\right)3 < 4\left(\frac{1}{4}\right)x$	Simplificar
$\frac{3}{4} < x$	De manera equivalente
$x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$	

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $-6x + 3 \leq -8x - 7$

Solución

$-6x + 3 \leq -8x - 7$	Por el axioma 11, sumar 7
$-6x + 3 + 7 \leq -8x - 7 + 7$	Simplificar

$-6x + 10 \leq -8x$	Por el axioma 11, sumar $6x$
$-6x + 6x + 10 \leq -8x + 6x$	Simplificar
$10 \leq -2x$	Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, multiplicar por $-\frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{2}\right)10 \geq -2\left(-\frac{1}{2}\right)x$	Simplificar
$-5 \geq x$	De manera equivalente
$x \in (-\infty, -5]$	

■

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $3 < (5x - 7)/2 \leq 10$

Solución

$3 < \dfrac{5x-7}{2} \leq 10$	Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por 2
$6 < 5x - 7 \leq 20$	Por el axioma 11, sumar 7
$6 + 7 < 5x - 7 + 7 \leq 20 + 7$	Simplificar
$13 < 5x \leq 27$	Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por $\frac{1}{5}$
$13\left(\frac{1}{5}\right) < 5\left(\frac{1}{5}\right)x \leq 27\left(\frac{1}{5}\right)$	Simplificar
$\frac{13}{5} < x \leq \frac{27}{5}$	De manera equivalente
$x \in \left(\frac{13}{5}, \frac{27}{5}\right]$	

■

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $-2 < (6 - 2x)/4 \leq 5$

Solución

$-2 < \dfrac{6-2x}{4} \leq 5$	Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por 4
$-8 < 6 - 2x \leq 20$	Por el axioma 11, restar 6
$-8 - 6 < 6 - 6 - 2x \leq 20 - 6$	Simplificar
$-14 < -2x \leq 14$	Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, multiplicar por $-\frac{1}{2}$
$-14\left(-\frac{1}{2}\right) > -2\left(-\frac{1}{2}\right)x \geq 14\left(-\frac{1}{2}\right)$	Simplificar
$7 > x \geq -7$	De manera equivalente
$-7 \leq x < 7$	En forma de intervalo
$x \in [-7, 7)$	

■

EJEMPLO 5 Resolver la desigualdad $x^2 > 3x - 2$

Solución Al reescribir la desigualdad en la forma $x^2 - 3x + 2 > 0$, tenemos $(x - 1)(x - 2) > 0$.

Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es positivo, lo cual implica que los factores son del mismo signo.

Se tienen los siguientes casos.

Caso 1 Si $(x - 1)(x - 2) > 0$

entonces $x - 1 > 0$ y $x - 2 > 0$

De donde $x > 1$ y $x > 2$

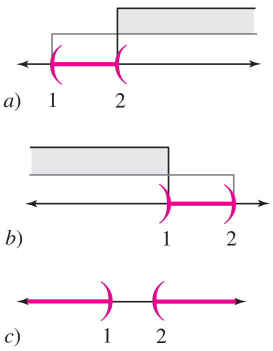


FIGURA 1.5.1

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$. Vea la FIGURA 1.5.1*a*).

Caso 2 Si $(x - 1)(x - 2) > 0$

entonces $x - 1 < 0$ y $x - 2 < 0$.

De donde $x < 1$ y $x < 2$

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$. Vea la FIGURA 1.5.1*b*).

De manera que la solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. Es decir, la solución es el conjunto $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Vea la FIGURA 1.5.1*c*). ■

EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

Solución Al considerar la desigualdad $x^2 - 2x - 8 \leq 0$, tenemos $(x - 4)(x + 2) \leq 0$

Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es menor o igual a cero, lo cual ocurre cuando los factores son de signos diferentes o cero.

Se tienen los siguientes casos.

Caso 1 Si $(x - 4)(x + 2) \leq 0$

entonces $x - 4 \leq 0$ y $x + 2 \geq 0$.

De donde $x \leq 4$ y $x \geq -2$.

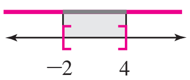


FIGURA 1.5.2

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, 4] \cap [-2, \infty) = [-2, 4]$. Vea la FIGURA 1.5.2.

Caso 2 Si $(x - 4)(x + 2) \leq 0$,

entonces $x - 4 \geq 0$ y $x + 2 \leq 0$.

De donde $x \geq 4$ y $x \leq -2$.

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, -2] \cap [4, \infty) = \varnothing$.

La solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. En este caso la solución es el conjunto $x \in [-2, 4] \cup \varnothing = [-2, 4]$. Vea la figura 1.5.2. ■

EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $(x - 8)/(x + 4) \geq 5$

Solución Al considerar la desigualdad $\dfrac{x - 8}{x + 4} \geq 5$ se tienen los siguientes dos casos, dependiendo del signo del denominador.

Caso 1 Si $x + 4 > 0$ (observe que no se puede dar el caso $x + 4 \geq 0$),

entonces $x - 8 \geq 5(x + 4)$ con $x > -4$.

De manera que $-4x \geq 28$ y $x > -4$

Al dividir entre -4, tenemos $x \leq -7$ y $x > -4$.

Es decir $x \in (-\infty, -7] \cap [-4, \infty) = \varnothing$.

Caso 2 Si $x + 4 < 0$ (observe que no se puede dar el caso $x + 4 \leq 0$),

entonces $x - 8 \leq 5(x + 4)$ con $x < -4$.

De manera que $-4x \leq 28$ y $x < -4$.

Al dividir entre -4, tenemos $x \geq -7$ y $x < -4$.

Es decir, $x \in [-7, \infty) \cap (-\infty, -4) = [-7, -4)$.

Por último, la solución es la unión de los intervalos solución obtenidos en los dos casos, es decir, $x \in [-7, -4) \cup \varnothing = [-7, -4)$. ■

Otra manera de resolver una desigualdad es a través de un análisis gráfico.

Para esto, es necesario recordar que dada una función $y = f(x)$ los puntos de intersección entre su gráfica y el eje x se determinan al resolver la ecuación $f(x) = 0$. Y que, por otra parte, si $f(x) > 0$, entonces la gráfica está por "arriba" del eje x y si $f(x) < 0$, entonces la gráfica está por "abajo" del eje x. Vea la FIGURA 1.5.3.

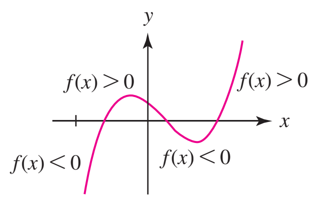


FIGURA 1.5.3

EJEMPLO 8 Resolver la desigualdad $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

Solución Los puntos de corte de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$ y el eje x son $x = 2$ y $x = -4$.

La gráfica de la función puede observarse en la FIGURA 1.5.4.

Se verifica que $f(x) = (x-2)(x+4) \leq 0$ en el intervalo $[-4, 2]$.

(También puede observarse que $f(x) = (x-2)(x+4) > 0$ en $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$. ■

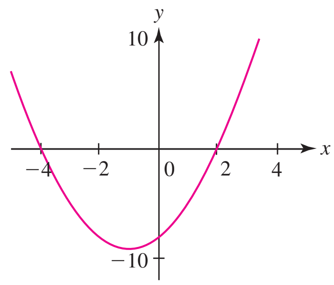


FIGURA 1.5.4

Valor absoluto de un número real

Hemos visto que a cada número real se le asocia un único punto de la recta numérica, considerando la distancia entre el origen (el cero) y el número dado. Esta distancia también se define como el valor absoluto o como la magnitud del número. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición de valor absoluto de un número real

Si x es un número real, se define el valor absoluto de x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 9 Algunos ejemplos de valores absolutos

1. $|2| = 2$
2. $|0| = 0$
3. $|-13| = 13$
4. $|x| + x = \begin{cases} x + x & \text{si } x \geq 0 \\ -x + x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
5. $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
6. $|x - 2| + x = \begin{cases} x - 2 + x & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x-2) + x & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ ■

Definición de distancia entre dos números

Si $x, y \in \mathbb{R}$, se define su distancia como $|x - y|$.

Propiedades del valor absoluto

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes del valor absoluto. La demostración se deja como ejercicio al lector (basta aplicar la definición de valor absoluto).

Teorema 1.5.1 Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|xy| = |x|\,|y|$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad |y| \neq 0$

Desigualdades y valor absoluto

En el siguiente teorema se presentan las propiedades del valor absoluto aplicadas a las desigualdades.

Teorema 1.5.2 Propiedades del valor absoluto

1. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$
2. $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ o $x > a$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad del triángulo
4. $x \leq |x|$ y $-x \leq |x|$
5. Si $y \geq 0$, entonces $|x| = y$ si y sólo si $\begin{cases} x = y & \text{si } x \geq 0 \\ -x = y & \text{si } x < 0 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN 1 Por definición, si $|x| < a$, entonces se tienen los siguientes casos:

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas al cambiar los símbolos de desigualdad estrictos $<$ y $>$ por los no estrictos $\leq$ y $\geq$.

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ -x < a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Multiplicar la segunda rama por -1

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ x > -a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Aplicar transitividad a ambas ramas

$-a < x < a$ Para toda $x \in \mathbb{R}$ ■

DEMOSTRACIÓN 2 Por definición, si $|x| > a$, entonces se tienen los siguientes casos:

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ -x > a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Multiplicar la segunda rama por -1

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ x < -a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Aplicar transitividad a ambas ramas

Es decir, $x < -a$ o $x > a$ Para toda $x \in \mathbb{R}$ ■

La demostración de las propiedades 3, 4 y 5 se proponen como ejercicio.

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas al cambiar los símbolos de desigualdad estrictos $<$ y $>$ por los no estrictos $\leq$ y $\geq$.

EJEMPLO 10 Resuelva la desigualdad $|x-4| < 30$

Solución

$\lvert x-4\rvert < 30$	Por el inciso 1, teorema 1.5.2
$-30 < x-4 < 30$	Por el axioma 11, sumar 4 a cada rama
$-30+4 < x-4+4 < 30+4$	Simplificar
$-26 < x < 34$	En forma de intervalo
$x \in (-26, 34)$	■

Unas de las desigualdades más utilizadas en el cálculo de límites son mostradas a continuación en los ejemplos 11 y 12.

EJEMPLO 11 Resuelva la desigualdad $|f(x)-L| < \varepsilon$

Solución

$\lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$	Por el inciso 1, teorema 1.5.2
$-\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$	Por el axioma 11, sumar L a cada rama
$L-\varepsilon < f(x)-L+L < L+\varepsilon$	Simplificar
$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$	En forma de intervalo
$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	■

EJEMPLO 12 Resuelva la desigualdad $|x-a| < \delta$

Solución

$\lvert x-a\rvert < \delta$	Por el inciso 1, teorema 1.5.2
$-\delta < x-a < \delta$	Por el axioma 11, sumar a y simplificar
$a-\delta < x < a+\delta$	En forma de intervalo
$x \in (a-\delta, a+\delta)$	■

EJEMPLO 13 Resuelva la desigualdad $|-5x+8| \leq 10$

Solución

$\lvert -5x+8\rvert \leq 10$	Por el inciso 1, teorema 1.5.2
$-10 \leq -5x+8 \leq 10$	Por el axioma 11, restar 8 a cada rama
$-10-8 \leq -5x+8-8 \leq 10-8$	Simplificar
$-18 \leq -5x \leq 2$	Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, dividir entre -5
$\dfrac{-18}{-5} \geq \dfrac{-5x}{-5} \geq \dfrac{2}{-5}$	Simplificar y reordenar
$-\dfrac{2}{5} \leq x \leq \dfrac{18}{5}$	En forma de intervalo
$x \in \left[-\frac{2}{5}, \frac{18}{5}\right]$	■

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x+5|>20$

Solución

$\|3x+5\|>20$	Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los dos casos
$3x+5>20, \quad 3x+5<-20$	Resolver las desigualdades simultáneamente
$3x>15, \quad 3x<-25$	Simplificar
$x>5, \quad x<-\dfrac{25}{3}$	En forma de intervalo
$x\in\left(-\infty,-\frac{25}{3}\right)\cup(5,\infty)$	

EJEMPLO 15 Resuelva la desigualdad $|-2x+17|\geq 10$

Solución

$\|-2x+17\|\geq 10$	Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los dos casos
$-2x+17\geq 10, \quad -2x+17\leq -10$	Resolver estas desigualdades simultáneamente
$-2x\geq 7, \quad -2x\leq -27$	
$x\leq \dfrac{7}{2}, \quad x\geq \dfrac{27}{2}$	En forma de intervalo
$x\in\left(-\infty,\frac{7}{2}\right]\cup\left[\frac{27}{2},\infty\right)$	

EJEMPLO 16 Resuelva la desigualdad $|4x+7|\geq x+4$

Solución

$\|4x+7\|\geq x+4$	Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los siguientes dos casos
$4x+7\geq x+4, \quad 4x+7\leq -(x+4)$	Resolver estas desigualdades simultáneamente
$3x\geq -3, \quad 5x\leq -11$	
$x\geq -1, \quad x\leq -\dfrac{11}{5}$	En forma de intervalo
$x\in\left(-\infty,-\frac{11}{5}\right]\cup(-1,\infty)$	

1.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

1. Demostrar los incisos 3, 4 y 5 del teorema 1.5.2.

En los ejercicios 2 a 29, resolver la desigualdad indicada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

2. $2x<4-10x$
3. $14x-6<24-4x$
4. $5x+14>40-8x$
5. $3(2x+2)>4x-10$
6. $-(2x-3)\leq 4-(2x+4)$
7. $\frac{1}{2}x-2\leq 3x-\frac{3}{2}$
8. $\frac{4}{3}x+8\geq 3\left(1-\frac{1}{3}x\right)$
9. $-4<6x+8<8$
10. $40<20-10x\leq 100$
11. $-5\leq 4-9x<-2$
12. $-2\leq 12-3x\leq 5$
13. $-2x-10<8+8x$
14. $(x+4)(x-6)<0$
15. $4(x-1)(x-5)>0$
16. $(x-2)(x+5)\leq 0$
17. $(x+4)(x-9)\geq 0$
18. $x^2+5x+6\leq 0$
19. $2x^2+x-1\geq 0$
20. $x^2>x+2$
21. $x^2+2x-3\geq 0$
22. $2x^2+5x<0$
23. $x^2+6x<0$
24. $x^2<16$
25. $(x+1)(x+2)(x+3)<0$
26. $x^2(x-4)\leq 0$
27. $2x^2+5x<-x^2+1$
28. $x^3>(x-2)^2$
29. $\operatorname{sen} x<\cos x$

En los ejercicios 30 a 51, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

30. $\dfrac{x-3}{x+5}>0$
31. $\dfrac{x-6}{x-9}<0$

32. $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 0$

33. $\dfrac{x+4}{x+12} > 10$

34. $\dfrac{x-4}{x} \leq 8$

35. $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq -1$

36. $\dfrac{9}{x} \leq x$

37. $\dfrac{1}{x} \leq x - 1$

38. $\dfrac{x}{x+5} > 3x$

39. $\dfrac{2}{2-x} \leq \dfrac{4}{x}$

40. $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{2}{x}$

41. $\dfrac{x}{x+4} \leq \dfrac{10}{x}$

42. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

43. $2x^2 - 9x + 4 > 0$

44. $\dfrac{x+3}{3-x} \geq \dfrac{x}{x+1}$

45. $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x+5} < 0$

46. $1 \leq \dfrac{2x}{1-x}$

47. $3x^2 - 7x + 14 \geq 10$

48. $\dfrac{1}{18-2x} \geq \dfrac{-1}{3x+6}$

49. $\dfrac{x+1}{2x-4} < \dfrac{1}{\frac{1}{3}x-1}$

50. $3x - 2 < x^2$

51. $\dfrac{3x-2}{x+1} + 4 > 0$

En los ejercicios 52 a 66, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

52. $|3x + 15| \geq 10$

53. $10 < |x + 5|$

54. $|2x + 3| < 10|x|$

55. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > 1$

56. $|2 + x| \leq 10$

57. $|x + 5| \geq 2x$

58. $|(x + 2)(x - 2)| < 2(2 - x)$

59. $\dfrac{|7-6x|}{|6x-2|} \geq 1$

60. $\left|\dfrac{8x}{2x-2}\right| \leq 1$

61. $\left|\dfrac{2x+3}{5x}\right| \leq 1$

62. $1 \leq \dfrac{|x+2|}{|8x-12|}$

63. $1 < \dfrac{|x-2|}{|x+3|}$

64. $|2x - 8| \geq 3$

65. $|-4x - 3| \leq 8$

66. $\left|\dfrac{5x}{x+3} - \dfrac{6}{x+3}\right| > 10$

67 Demuestre que el cuadrado de cualquier real no cero es positivo.

68. Demuestre que si $|x| \leq 1$, entonces $x^2 \leq x$.

69. Demuestre que si $|x| \geq 1$, entonces $x^2 \geq x$.

70. Suponga que $0 < a < b < c$, resuelva para x la siguiente desigualdad:

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x+c} \geq 0$$

71. Si $a, b, c, d > 0$ son números reales tales que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ demuestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$