

Capitolo 7

Costi e minimizzazione dei costi

Soluzioni dei Problemi

- 7.1 a) €500
 b) 30% di €500, ossia €150
 c) Senza ridurre il prezzo e posto che l'impresa non possa vendere altre stampanti, il meglio che essa può sperare sono i €150 che può ricevere dal produttore. Se riduce il prezzo a €200 e vende le stampanti, può guadagnare €50 in più rispetto alla migliore alternativa disponibile.

- 7.2 In corrispondenza dell'ottimo si deve avere

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

In questo problema si ha

$$\frac{200}{0,25} > \frac{1000}{10}$$
$$800 > 100$$

Ciò implica che l'output aggiuntivo ottenibile da un euro in più speso in ore-macchina è maggiore dell'output aggiuntivo ottenibile da un euro in più speso in ore-lavoro. Quindi l'impresa potrebbe ridurre il costo totale e mantenere invariato il livello dell'output usando meno ore di lavoro e più ore-macchina.

- 7.3 a) Nel breve periodo la quantità di terra usata nella produzione è fissa. Quindi, nel breve periodo, l'agricoltore sceglie le quantità di capitale e lavoro. Le quantità di lavoro e capitale che minimizzano il costo totale devono soddisfare l'equazione $MP_L / MP_K = w/r$ dove w e r denotano i prezzi di lavoro e capitale. Si noti che $w/r = (1,05 w) / (1,05 r)$. Le quantità di input che minimizzano il costo totale, per ogni livello di output, non cambiano quando i prezzi degli input aumentano del 5% e la quantità di terra è fissa.
 b) Per un dato livello di output, l'agricoltore usa più capitale e meno lavoro.

7.4 La condizione di tangenza implica

$$\frac{\frac{1}{r\sqrt{K}}}{\frac{1}{w\sqrt{L}}} = \frac{1}{r\sqrt{K}} = \frac{1}{w\sqrt{L}}$$

$$w\sqrt{L} = r\sqrt{K}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{w^2}{r^2}$$

Dato che $w = 10$ e $r = 1$, ciò implica

$$100 = \frac{K}{L}$$

$$100L = K$$

Ritornando alla funzione di produzione e assumendo $Q = 121000$ si ha

$$121\,000 = [L^{1/2} + K^{1/2}]^2$$

$$121\,000 = [L^{1/2} + (100L)^{1/2}]^2$$

$$121\,000 = [L^{1/2} + 10L^{1/2}]^2$$

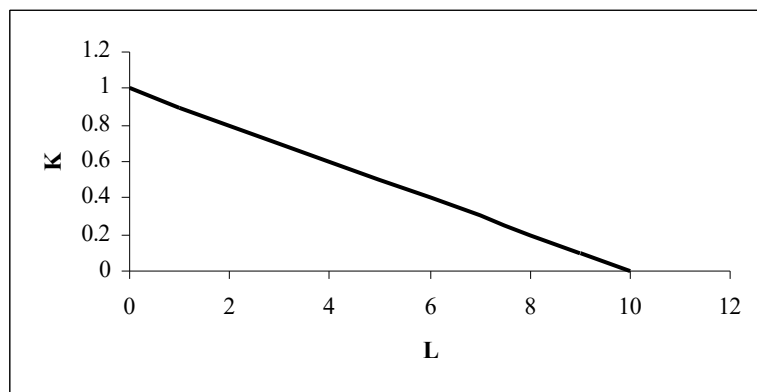
$$121\,000 = [11L^{1/2}]^2$$

$$121\,000 = 121L$$

$$1000 = L$$

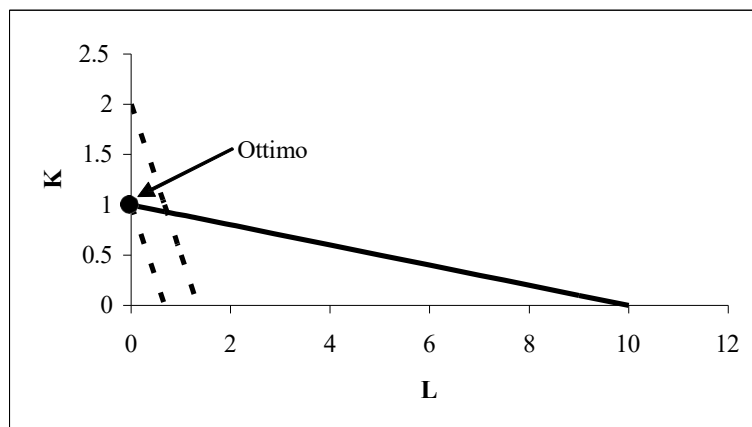
Dato che $K = 100L$, $K = 100(1000) = 100000$. Le quantità di capitale e lavoro di minimo costo necessarie a produrre 121 000 fusoliere sono $K = 100000$ e $L = 1000$.

7.5 a)



K e L sono perfetti sostituti, il che significa che la funzione di produzione è lineare e gli isoquanti sono rette. Possiamo scrivere la funzione di produzione come $Q = 10000K + 1000L$, dove Q è il numero di lavoratori per i quali viene calcolata la busta paga.

- b) Se $r = €5$ e $w = €7,5$, la pendenza del generico isocosto è $-7,5/5 = -1,5$. Quindi l'isocosto è più ripido dell'isoquante, il che implica che l'impresa utilizzerà solo computer (K) per minimizzare i costi. La combinazione di minimo costo è $K=1$ e $L=0$. Questa soluzione si può vedere nel grafico sotto. Gli isocosti sono le rette tratteggiate.



Il costo totale di preparazione delle buste paga per 10000 lavoratori è $TC = 5(1) + 7,5(0) = 5$

- c) L'impresa utilizzerà lavoro impiegatizio solo se $MP_L / w > MP_K / r$. Quindi è necessario che $0,1 / 7,5 > 1/r$ ossia $r > 75$.

7.6 Dalla condizione di tangenza, otteniamo

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$
$$K = \left(\frac{w}{r} \right) L$$

Sostituendo nella funzione di produzione si ha

$$Q = LK$$
$$Q = L \left(\frac{w}{r} \right) L$$
$$Q = \left(\frac{w}{r} \right) L^2$$
$$L = \left(\frac{rQ}{w} \right)^{1/2}$$

Ciò rappresenta la funzione di domanda di L . Poiché

$$K = \left(\frac{w}{r} \right) L$$

abbiamo

$$K = \left(\frac{w}{r} \right) \left(\frac{rQ}{w} \right)^{1/2}$$
$$K = \left(\frac{wQ}{r} \right)^{1/2}$$

Ciò rappresenta la funzione di domanda di K .

7.7 Dalla condizione di tangenza, otteniamo

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$
$$K = \left(\frac{w}{r} \right) L$$

Sostituendo nella funzione di produzione si ha

$$Q = L^2 K^2$$
$$Q = L^2 \left(\left(\frac{w}{r} \right) L \right)^2$$
$$Q = \left(\frac{w}{r} \right)^2 L^4$$
$$L = \left(\frac{r}{w} \right)^{1/2} Q^{1/4}$$

Ciò rappresenta la funzione di domanda di L . Poiché abbiamo $K = (w/r)^{1/2} Q^{1/4}$

7.8 Dalla condizione di tangenza, otteniamo

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

$$K = \left(\frac{w}{r} \right) L$$

Sostituendo nella funzione di produzione si ha

$$Q = L^{1/3} K^{1/3}$$

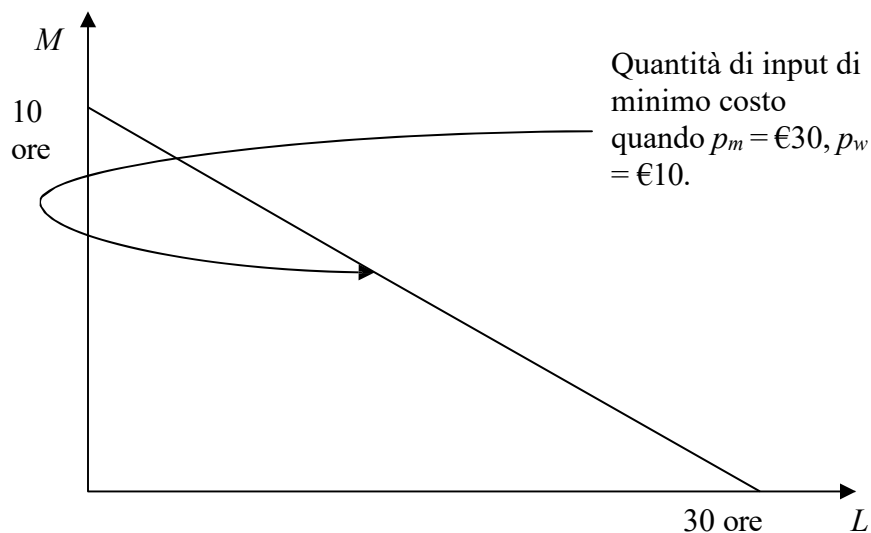
$$Q = L^{1/3} \left(\left(\frac{w}{r} \right) L \right)^{1/3}$$

$$Q = \left(\frac{w}{r} \right)^{1/3} L^{2/3}$$

$$L = \left(\frac{r}{w} \right)^{1/2} Q^{3/2}$$

Ciò rappresenta la funzione di domanda di L . Poiché abbiamo $K = (w/r)^{1/2} Q^{3/2}$

- 7.9 a) Gli isoquanti della funzione di produzione sono rette. Con i prezzi degli input dell'esercizio, la pendenza dell'isoquante è uguale al rapporto tra i prezzi. Quindi, tutte le quantità positive di input (misurate in ore) tali che $4L + 12M = 120$ minimizzano i costi.



b) $G = 4L + 12M$

7.10

- a) Si noti, innanzitutto, che questa funzione di produzione ha un $MRTS_{L,K}$ decrescente. La condizione di tangenza implica che $1/2\sqrt{L} = 1/50$ ovvero $L = 625$. Sostituendo nella funzione di produzione abbiamo che $K = 10 - 25 = -15$. Dato che l'impresa non può utilizzare una quantità negativa di capitale, in questo caso la condizione di tangenza non vale.

Considerando il punto d'angolo con $K = 0$, poichè $Q = 10$ l'impresa domanda $L = Q^2 = 100$ unità di lavoro. In questo punto, $MP_L / w = (1/20)/1 = 0,05 > MP_K / r = 1/50 = 0,02$. Dato che il prodotto marginale per euro è più alto per il lavoro, l'impresa userà soltanto lavoro.

- b) L'impresa utilizzerà una quantità positiva di capitale se $\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$, ovvero $2\sqrt{L} = r$. Quindi $L = 0,25r^2$. Per il vincolo di produzione $K = Q - \sqrt{L} = 10 - 0,5r$. Quindi, se $K > 0$, dobbiamo avere $10 - 0,5r > 0$, ovvero $r < 20$.
- c) Di nuovo, per la condizione di tangenza dobbiamo avere $2\sqrt{L} = r$. Quindi, poichè $r = 50$, $L = 625$, per il vincolo di produzione, la domanda di capitale è $K = Q - \sqrt{L} = Q - 25$. Quindi, se $K > 0$, dobbiamo avere $Q > 25$.

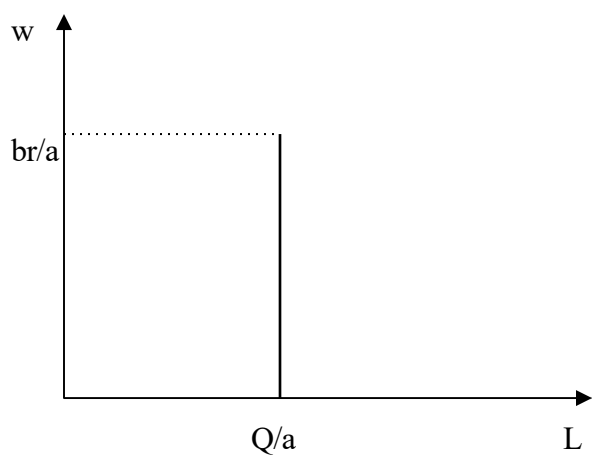
7.11

- a) Se $K = 0$, allora l'impresa deve usare $L = 5$ unità di lavoro. Affinchè questa scelta sia ottima, si deve avere che $MP_L / w > MP_K / r$, ovvero $1/w > 6$. In altre parole, $w < 1/6$.
- b) Se $L = 0$, allora l'impresa deve usare $K = 5$ unità di capitale. Affinchè questa scelta sia ottima, si deve avere che $MP_L / w < MP_K / r$, ovvero $6/w > 1$. In altre parole, $w > 6$.
- c) Affinchè l'impresa usi sia capitale che lavoro, si deve avere $1/6 < w < 6$. Per capire perchè, si noti che gli isoquanti presentano un $MRTS_{L,K}$ decrescente. In particolare, $MRTS_{L,K} = 6$ quando l'isoquanto corrispondente a $Q = 5$ interseca l'asse di K (dove $L = 0$). Un $MRTS_{L,K}$ decrescente implica che l'isoquanto corrispondente a $Q = 5$ diventa gradualmente più piatto fino ad intersecare l'asse di L ($K = 0$), dove $MRTS_{L,K} = 1/6$.

7.12

Si ricordi che con una funzione di produzione lineare si ottengono solitamente delle soluzioni d'angolo. In tal caso, l'impresa impiegherà solo lavoro se il suo prezzo è sufficientemente basso, ovvero se $\frac{MP_L}{w} > \frac{MP_K}{r}$, cioè $w < \frac{br}{a}$. Analogamente, l'impresa userà solo capitale se $r < \frac{aw}{b}$. Se l'impresa usa solo lavoro, userà $L = \frac{Q}{a}$ unità a

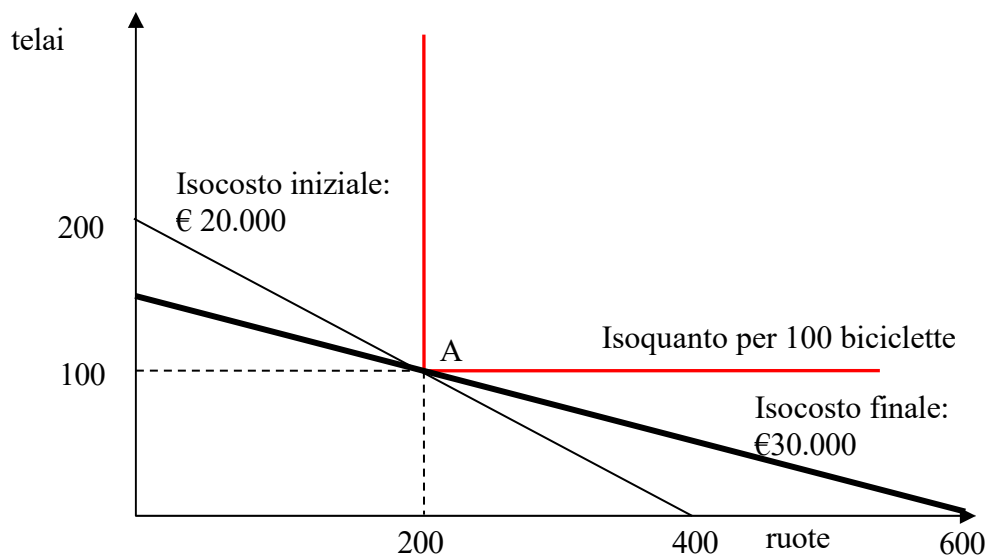
prescindere dal prezzo, e similmente, se usa solo capitale, userà $K = \frac{Q}{b}$ unità. La curva di domanda di lavoro per un dato prezzo del capitale, r , è rappresentata sotto.



- 7.13 La condizione di tangenza implica che $\frac{1}{2\sqrt{L}} = \frac{w}{r}$, ovvero $\sqrt{L} = \frac{r}{2w}$. Chiaramente la curva di domanda di L non è funzione del livello di output, Q . Quindi, al variare del livello di output, la quantità di lavoro è costante. Ne segue che, se rappresentassimo gli isoquanti con il lavoro sull'asse orizzontale, il sentiero di espansione sarebbe una retta verticale.

La curva di domanda del capitale può essere ottenuta sostituendo la curva di domanda di lavoro nella funzione di produzione. Cioè, $K + \frac{r}{2w} = Q$, quindi $K = Q - \frac{r}{2w}$.

- 7.14 a) La funzione di produzione è $Q = \min(F, \frac{1}{2} W)$, dove F denota il numero di telai e W denota il numero di ruote.



- b) Per produrre 100 biciclette nel modo più economico possibile, l'impresa deve scegliere sempre la combinazione A, con 200 ruote e 100 telai. Inizialmente, quando il prezzo di un telaio è €100 e il prezzo di una ruota è €50, l'isocosto è quello meno marcato mostrato nel grafico; tutti i punti su questo isocosto implicano una spesa di €20.000.

Successivamente, quando il prezzo di un telaio è €200 e il prezzo di una ruota è €50, l'isocosto è quello più marcato; tutti i punti su questo isocosto implicano una spesa di €30.000.

7.15

- a) Poichè $\bar{K} = 9$, otteniamo $18L + 9 = 45$, il che implica $L = 36/18 = 2$. Quindi, il costo totale dell'impresa con questa combinazione di input è $4(2) + 5(9) = €53$.
- b) Se l'impresa non può operare in modo ottimo, sceglie lavoro e capitale in modo da soddisfare la condizione di tangenza: $\frac{2K}{2L+1} = \frac{4}{5}$, il che implica $10K = 8L + 4$. Inoltre, $2KL + K = 45$. Combinando queste due condizioni, $K = \sqrt{18} = 4,24$ e $L = 4,8$. In tal modo la spesa dell'impresa è ora $4(4,24) + 5(4,8) = €41$ circa. Quindi, l'impresa perde €12 a causa del vincolo sul capitale.

- 7.16 a) Con tre input, abbiamo bisogno di due condizioni di tangenza per assicurare che il prodotto marginale per euro speso sia uguale per tutti gli input. (Potremmo considerare anche una terza condizione di tangenza, ma sarebbe ridondante). Uguagliando i prodotti marginali per euro di lavoro e capitale si ha $1/2\sqrt{L} = 1/2\sqrt{K}$ ovvero $L = K$. Analogamente, uguagliando i prodotti marginali per euro di lavoro e materie prime si ha $1/2\sqrt{L} = 1/2\sqrt{M}$ ovvero $L = M$. Quindi, usando il vincolo di produzione per trovare la domanda di lavoro si ottiene $Q = \sqrt{L} + \sqrt{L} + \sqrt{L}$, ovvero $L = (1/3)Q^2$. Poiché, per le condizioni di tangenza, $L = M = K$, abbiamo anche $K = (1/3)Q^2$ e $M = (1/3)Q^2$.
- b) Innanzitutto, si noti che con $K = 4$, l'impresa può produrre fino a $Q = \sqrt{0} + \sqrt{4} + \sqrt{0} = 2$ unità di output senza usare lavoro o materie prime. Per produrre più di $Q = 2$, l'impresa uguaglierà ancora i prodotti marginali per euro di lavoro e materie prime; nel punto (a), si è visto che ciò implica $L = M$. Sostituendo quest'ultimo risultato e $K = 4$ nel vincolo di produzione, abbiamo $Q = \sqrt{L} + \sqrt{4} + \sqrt{L}$ che fornisce $L = (1/4)(Q - 2)^2$ come domanda di lavoro. Quindi $L = M$ implica che la domanda di materie prime è $M = (1/4)(Q - 2)^2$. In definitiva, le funzioni di domanda sono

$$L(Q) = M(Q) = \begin{cases} 0 & Q \leq 2 \\ \frac{1}{4}(Q-2)^2 & Q > 2 \end{cases}$$

- c) Di nuovo, con $K = 4$ e $L = 9$, l'impresa può produrre fino a $Q = 5$ unità di output senza usare materie prime. Se l'impresa vuole produrre livelli più elevati di output, può usare materie prime secondo l'equazione $Q = \sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{M}$, ovvero $M = (Q - 5)^2$. Quindi, la domanda di materie prime è

$$M(Q) = \begin{cases} 0 & Q \leq 5 \\ (Q-5)^2 & Q > 5 \end{cases}$$

7.17 Abbiamo $MP_L/w = 4/1 = 4 > MP_K/r = 2/2 = 1$. Quindi l'impresa non sta minimizzando il suo costo totale di lungo periodo. Impiegando più lavoro e meno capitale, potrebbe continuare a produrre 32 unità di output riducendo il costo totale.

7.18

a) Si supponga che l'impresa stia operando nel breve periodo, con $L = 80$. Per produrre $Q = 8000$, quanto K è necessario? Dalla funzione di produzione ricaviamo che $8.000 = K^2(80) \Rightarrow K = 10$. Il costo totale sarebbe $C = wL + rK = €200(80) + €400(10) = €2.000$ al giorno.

b) Esaminiamo la convenienza di K e L quando $K = 10$ e $L = 80$.

Per il capitale: $MP_K / r = 2KL / 400 = 2(10)(80) / 400 = 4$

Per il lavoro: $MP_L / w = K^2 / 200 = 10^2 / 200 = 0.5$

Quindi il prodotto marginale per euro speso in capitale è maggiore di quello del lavoro. L'impresa vorrebbe utilizzare più capitale e meno lavoro.

c) Poiché la funzione di produzione è una Cobb-Douglas, sappiamo che il $MRTS_{L,K}$ è decrescente e che gli isoquanti non intersecano gli assi K e L . Quindi la combinazione ottima (K,L) sarà interna (con $K > 0$ e $L > 0$). Per individuare l'ottimo, utilizziamo le due seguenti condizioni:

(1) Condizione di tangenza: $MP_K / MP_L = r / w \Rightarrow 2KL/K^2 = 400 / 200 \Rightarrow K = L$

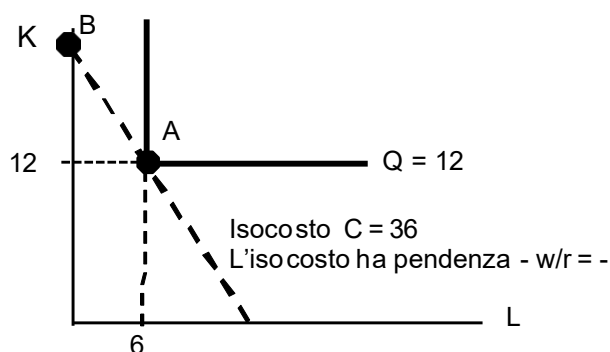
(2) Vincolo di produzione: $K^2L = 8.000$

Le equazioni (1) e (2) implicano che $K = 20$ e $L = 20$.

Il costo totale sarebbe $C = wL + rK = €200(20) + €400(20) = €12.000$ al giorno.

7.19

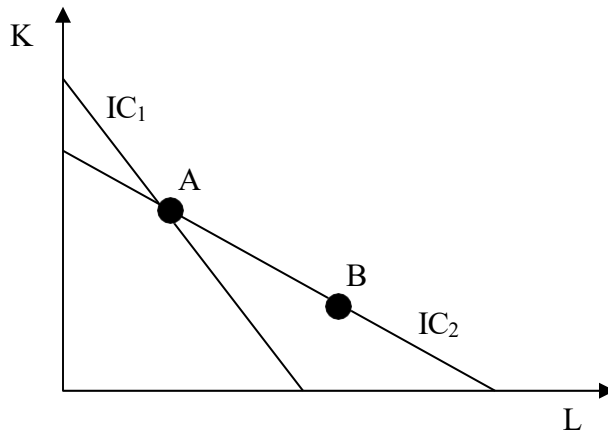
L'isoquanto cui corrisponde $Q = 12$ per questa tecnologia Leontief è rappresentato sotto. Per produrre $Q = 12$, l'impresa necessita di almeno $K = 12$ e $L = 12$. Ciò costerà all'impresa $C = wL + rK = 4(12) + 1(12) = 60$. Nel grafico è rappresentato anche l'isocosto corrispondente ad una spesa pari a 36. La combinazione ottima di input è A .



L'isoquanto cui corrisponde $Q = 12$ per questa tecnologia Leontief è rappresentato sotto. Per produrre $Q = 12$, l'impresa necessita di almeno $K = 12$ e $L = 6$. Ciò costerà

all'impresa $C = wL + rK = 4(6) + 1(12) = 36$. Nel grafico è rappresentato anche l'isocosto corrispondente ad una spesa pari a 36. La combinazione ottima di input è A.

7.20



Dato che la produzione dell'impresa rimane invariata, essa produce lo stesso livello di output in A e B . Cioè, l'isoquante passante per A passa anche per B . Ora, si supponga che nel punto B l'impresa stia minimizzando i costi. Quindi l'isoquante passante per B è tangente all'isocosto IC_2 . Poiché il $MRTS$ è decrescente, è impossibile che l'isoquante che passa per B passi anche per A . Ciò si può dedurre facilmente dal grafico. Tale conclusione può essere raggiunta anche usando la proprietà per la quale una retta tangente ad una curva interseca la curva solo nel punto di tangenza. Analogamente, se l'impresa stesse minimizzando i costi in A , allora l'isocosto IC_1 sarebbe tangente all'isoquante; ma allora l'isocosto IC_2 non potrebbe essere anch'esso tangente. Quindi, è impossibile che sia A che B siano entrambe combinazioni di input che minimizzano i costi.