

Capitolo 6

La teoria della produzione

Soluzioni dei Problemi

6.1 La tabella è mostrata in basso:

L	Q
0	0
1	5
2	16
3	27
4	32
5	25
6	0

- a) Il prodotto medio in corrispondenza di ciascun punto si può calcolare dividendo il prodotto totale per L. I valori ottenuti sono 0, 5, 8, 9, 8, 5, 0. Quindi il prodotto medio è massimizzato per $L = 3$.
- b) Il prodotto marginale in corrispondenza dei valori da 1 a 6 è dato rispettivamente da: 5, 11, 11, 5, -7, -25. Quindi sia la seconda che la terza unità di L forniscono il più alto incremento dell'output [usando il calcolo differenziale si può vedere che il prodotto marginale è massimizzato per $L = 2$].
- c) Dalla Tabella è chiaro che il prodotto totale è massimizzato per $L = 4$.
- d) Il prodotto medio è pari a zero solo se il prodotto totale è pari a zero. Ciò si verifica per $L = 6$.

e)

L	Q
0	0
1	7
2	20
3	27
4	16
5	-25
6	-108

Il prodotto medio in corrispondenza di ciascun punto si può calcolare dividendo il prodotto totale per L . I valori ottenuti sono 0, 7, 10, 9, 4, -5, -18. Quindi il prodotto medio è massimizzato per $L = 2$.

Il prodotto marginale in corrispondenza dei valori da 1 a 6 è dato rispettivamente da: 7, 13, 7, -11, -41, -83.

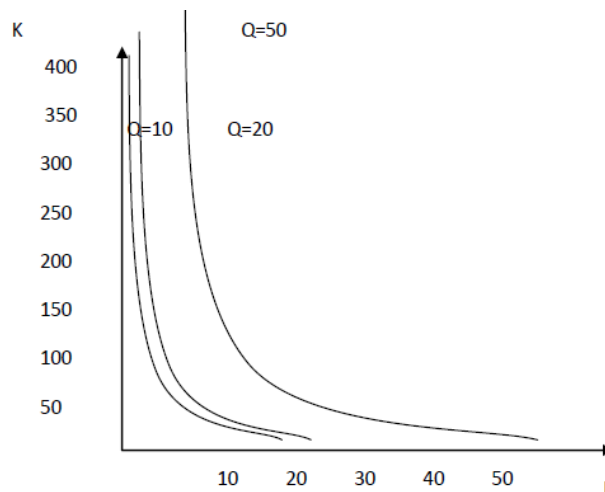
Quindi il prodotto marginale è massimizzato per $L = 2$.

Dalla Tabella è chiaro che il prodotto totale è massimizzato per $L = 3$.

Il prodotto medio non è mai pari a 0.

- 6.2
- a) Non corretta. Sappiamo che, quando $MP > AP$, AP è crescente e che, quando $MP < AP$, AP è decrescente.
 - b) Non corretta. Se MP è negativo, $MP < 0$. Ma $AP = Q / L$ non può essere negativo dato che il prodotto totale Q e il livello dell'input L non possono essere mai negativi. Quindi, $MP < 0 < AP$, il che implica solo che AP è decrescente.
 - c) Non corretta. Il prodotto medio è sempre positivo, sicché questo non ci dice niente circa la variazione del prodotto totale. Che il prodotto totale sia o non sia crescente dipende dal fatto che il prodotto marginale sia o non sia positivo.
 - d) Non corretta. Sappiamo che se il prodotto totale è crescente allora $MP > 0$. Tuttavia, se è iniziata la fase dei rendimenti marginali decrescenti il prodotto marginale è positivo ma decrescente, il che non preclude che $MP > 0$.

6.3



Dato che gli isoquanti sono convessi verso l'origine essi sono caratterizzati da un tasso marginale decrescente di sostituzione tecnica.

6.4 Per questa funzione di produzione $MPL = 2$ $MPK = 3$. Il $MRTS_{L,K}$, è quindi pari a $2/3$.

6.5 Per questa funzione di produzione $MP_L = a$ e $MP_K = b$. Il $MRTS_{L,K}$ è quindi pari a

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{a}{b}$$

6.6 a) Nel punto A, l'impresa produce 18 unità di output. Quindi, dato che B si trova sullo stesso isoquante, deve accadere che in corrispondenza di B si abbia $L = 17$.

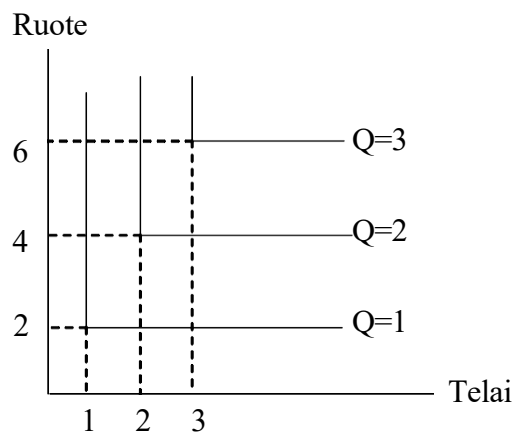
b) In A, il rapporto capitale-lavoro è pari a $3/5$ e $MRTS_{L,K} = 1/2$. In B, il rapporto capitale-lavoro è pari a $1/17$, e $MRTS_{L,K} = 1/18$.

Quindi l'elasticità di sostituzione è pari a

$$\frac{(1/17 - 3/5)/(3/5)}{(1/18 - 1/2)/(1/2)} = \frac{69}{68}$$

Una funzione di produzione Cobb-Douglas ha un'elasticità di sostituzione pari a 1. Quindi questa funzione di produzione è caratterizzata da un'elasticità di sostituzione leggermente maggiore rispetto a una Cobb-Douglas, il che è indice di una facilità di sostituzione tra gli input leggermente superiore.

6.7 a) In questo caso gli isoquanti hanno una forma a L, come nel seguente grafico



Questi isoquanti con forma a L implicano che, data una combinazione di input, ad esempio 2 telai 4 ruote, unità aggiuntive di una delle due risorse, senza unità aggiuntive dell'altra, non si traducono in un aumento dell'output.

b) In termini analitici questa funzione di produzione può essere scritta come

$$Q = \min(F, \frac{1}{2}T)$$

dove F and T rappresentano il numero di telai e di ruote.

- 6.8 Se le quantità di tutti gli input vengono moltiplicate per un fattore λ (cioè, si sostituisce K con λK , e L con λL), l'output è uguale a λQ . Quindi una funzione di produzione lineare ha rendimenti di scala costanti.

- 6.9 a) Per stabilire la natura dei rendimenti di scala, aumentiamo gli input di un fattore λ e verifichiamo se l'output aumenta di un fattore maggiore di, minore di, o uguale a λ .

$$Q_\lambda = 50\sqrt{\lambda M \lambda L} + \lambda M + \lambda L$$

$$Q_\lambda = 50\lambda\sqrt{ML} + \lambda M + \lambda L$$

$$Q_\lambda = \lambda [50\sqrt{ML} + M + L]$$

$$Q_\lambda = \lambda Q$$

Aumentando gli input di un fattore λ l'output aumenta di un fattore λ . Dato che l'output aumenta dello stesso fattore in cui aumentano gli input, questa funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti.

- b) Il prodotto marginale del lavoro è

$$MP_L = 25\sqrt{\frac{M}{L}} + 1$$

Si supponga che $M > 0$. Tenendo fisso M , un L crescente avrà come effetto la riduzione di MP_L . Il prodotto marginale del lavoro è decrescente per qualunque livello di L . Il MP_L , tuttavia, non sarà mai negativo dato che entrambi gli elementi dell'equazione di cui sopra sono sempre maggiori o uguali a zero. In effetti, per questa funzione di produzione, $MP_L \geq 1$.

- 6.10 a) Per una funzione di produzione CES della forma

$$Q = \left[\frac{\sigma-1}{\sigma} K^\sigma + \frac{\sigma-1}{\sigma} L^\sigma \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$Q = \left[aL^{\sigma} + bK^{\sigma} \right]$$

l'elasticità di sostituzione è pari a σ . Nel caso in esame abbiamo una funzione di produzione del tipo

$$Q = \left[K^{0,5} + L^{0,5} \right]^2$$

Per calcolare l'elasticità di sostituzione, si ponga $(\sigma - 1)/\sigma = 0,5$ oppure $\sigma/(\sigma - 1) = 2$ e si risolva per σ .

$$\begin{aligned} \frac{\sigma - 1}{\sigma} &= 0,5 \\ \sigma - 1 &= 0,5\sigma \\ 0,5\sigma &= 1 \\ \sigma &= 2 \end{aligned}$$

In entrambi i casi l'elasticità di sostituzione è pari a 2.

b)

$$\begin{aligned} Q_{\bar{\lambda}} &= \left[(\lambda K)^{0,5} + (\lambda L)^{0,5} \right]^2 \\ Q_{\bar{\lambda}} &= \left[(\lambda^{0,5})(K^{0,5} + L^{0,5}) \right]^2 \\ Q_{\lambda} &= \lambda \left[K^{0,5} + L^{0,5} \right]^2 \\ Q_{\lambda} &= \lambda Q \end{aligned}$$

Dato che l'output aumenta dello stesso fattore in cui aumentano gli input, questa funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti.

c)

$$\begin{aligned} Q_{\lambda} &= \left[100 + (\lambda K)^{0,5} + (\lambda L)^{0,5} \right]^2 \\ Q_{\lambda} &= \left[100 + \lambda^{0,5} (K^{0,5} + L^{0,5}) \right]^2 \\ Q_{\lambda} &= \lambda \left[\frac{100}{\lambda^{0,5}} + K^{0,5} + L^{0,5} \right]^2 < \lambda Q \end{aligned}$$

Quando gli input vengono aumentati di un fattore λ , dove $\lambda > 1$, l'output aumenta di un fattore minore di λ il che implica rendimenti di scala decrescenti.

Intuitivamente, in questa funzione di produzione, sebbene si possano aumentare gli input K e L , non è possibile aumentare la parte costante. Quindi l'output non può aumentare nella stessa misura degli input.

- 6.11 a) Le due funzioni di produzione si possono scrivere come

$$Q_1 = 550L + 1500K$$

$$Q_2 = 500L + 10000K$$

Dato che $Q_2 > Q_1$ per date quantità di K e L , l'impresa può conseguire un output maggiore per ogni data combinazione di input. L'innovazione dunque si traduce in progresso tecnologico nel senso definito nel testo.

- b) Inizialmente $MP_K = 1500$ e $MP_L = 500$ il che implica che $MRTS_{L,K} = 0,33$. Dopo l'innovazione $MP_K = 10000$ and $MP_L = 500$ il che implica che $MRTS_{L,K} = 0,05$. Poichè il tasso marginale di sostituzione tecnica tra lavoro e capitale si riduce dopo l'innovazione, si tratta di progresso tecnologico a risparmio di lavoro.

- 6.12 a) Per quantità positive di K e L , $\sqrt{KL} < K\sqrt{L}$, per cui con la nuova funzione di produzione è possibile produrre più Q . Quindi di fatto vi è stato progresso tecnologico.

- b) Con la funzione di produzione iniziale

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L}.$$

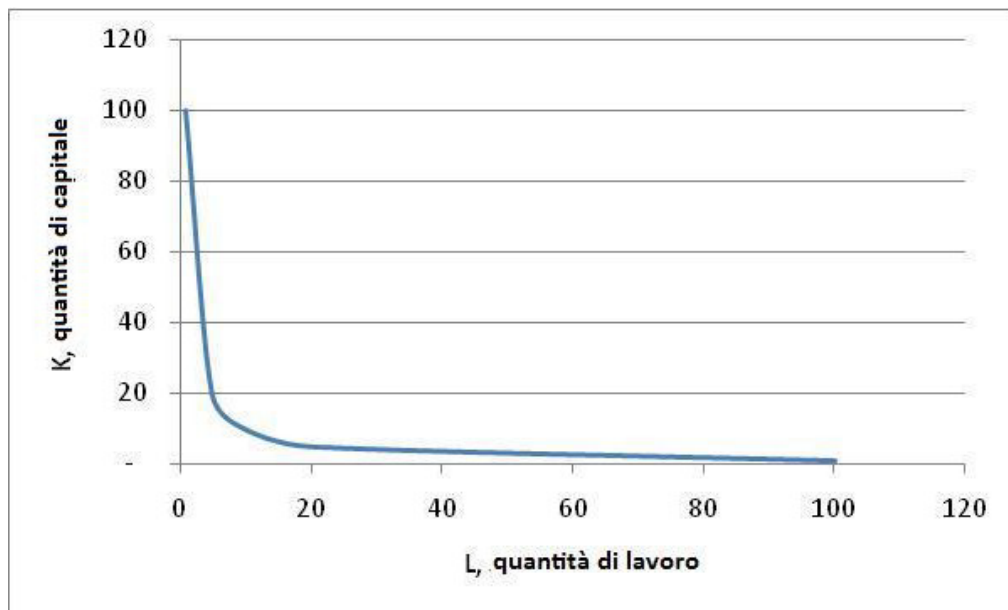
Con la nuova funzione di produzione

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{0,5K}{L}$$

Per ogni rapporto capitale-lavoro, $MRTS_{L,K}$ è minore con la seconda funzione di produzione. Quindi, il progresso tecnologico è a risparmio di lavoro.

6.13

a) L'isoquante corrispondente a $Q = 100$ è il seguente:



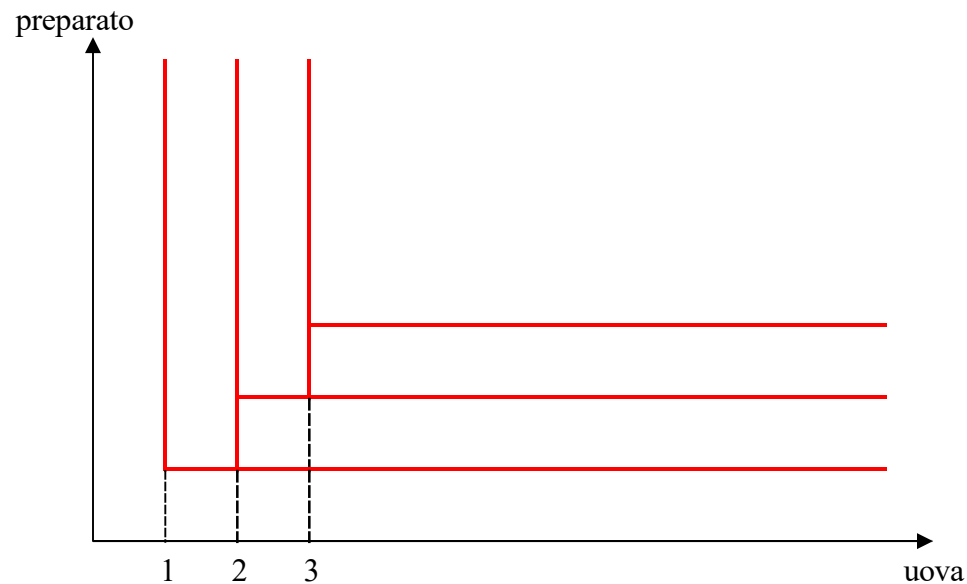
b) Per trovare l'equazione generale di un isoquante ricaviamo K in funzione di L dalla funzione di produzione. Quindi, dato che $Q = LK$, l'equazione generale di un isoquante per questa funzione di produzione è:

$$K = \frac{Q}{L}$$

Tale isoquante è caratterizzato da un tasso marginale di sostituzione tecnica decrescente. Ciò si può vedere dal grafico di cui sopra che è convesso verso l'origine.

6.14

a)



b) $MP_L = aL^{a-1}K^b$ $MP_K = bL^aK^{b-1}$

Prodotto marginale del lavoro: guardare esponente di L , se < 1 decrescente, se $= 1$ costante, se > 1 crescente

Prodotto marginale del capitale: guardare esponente di K , se < 1 decrescente, se $= 1$ costante, se > 1 crescente

Rendimenti di scala: guardare somma degli esponenti: se < 1 decrescenti, se $= 1$ costanti, se > 1 crescenti

6.15

Funzione di produzione	MP_L	MP_K	Prodotto marginale del lavoro?	Prodotto marginale del capitale?	Rendimenti di scala?
$Q = L + K$	$MP_L = 1$	$MP_K = 1$	COSTANTE in L	COSTANTE in K	COSTANTI
$Q = \sqrt{LK}$	$MP_L = \frac{1\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}$	$MP_K = \frac{1\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$	DECRESCENTE in L	DECRESCENTE in K	COSTANTI
$Q = \sqrt{L} + \sqrt{K}$	$MP_L = \frac{1}{2\sqrt{L}}$	$MP_K = \frac{1}{2\sqrt{K}}$	DECRESCENTE in L	DECRESCENTE in K	DECRESCENTI
$Q = L^3K^3$	$MP_L = 3L^2K^3$	$MP_K = 3L^3K^2$	CRESCENTE in L	CRESCENTE in K	CRESCENTI
$Q = LK$	$MP_L = K$	$MP_K = L$	COSTANTE in L	COSTANTE in K	CRESCENTI