Soluzioni delle prove d'esame

Prova 1

Esercizio 1

Urto elastico

Si conservano la quantità di moto (proiezione sull'asse del moto):

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

e l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

combinando le due relazioni si ottiene:

$$v_2 = \frac{2 m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica nella compressione si ricava:

$$\Delta X = \sqrt{\frac{m_2}{k}} v_2 = 3.0 \text{ cm}$$

Urto anelastico

Si conserva solo la quantità di moto nell'urto:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_2$$

Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica, in particolare nella compressione:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{1}{2} k \Delta X^2$$

$$\Delta X = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v_2 = 1.8 \text{ cm}$$

Esercizio 2

(a) Dalla definizione di velocità del centro di massa si ottiene

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{cm}} = -0.20\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}.$$

(b) Il momento delle forze esterne uguale a zero, quindi si conserva il momento angolare:

$$L = (l/2) m v_1 + (l/2) m v_2, \text{ inoltre } L = I\omega, \text{ dove } I = (2/3) m l^2$$

$$l = \frac{3(v_1 + |v_2|)}{4\omega} = 1.1 \text{ m}$$

(c) $E_{\text{diss}} = [1/2\ I\omega^2 + 1/2\ (2m) V_{cm}^2] - [1/2\ m_1 v_1^2 + 1/2\ m_2 v_2^2] = -0.36$ J.

Esercizio 3

(a) $T_c = T_B = p_B V_B / (nR) = 289$ K.

(b) $V_A = V_C = nRT_C / p_C = 0.0640$ m^3; inoltre nella trasformazione adiabatica reversibile del gas si ha $T_A = T_B (V_B / V_A)^{\gamma - 1} = 335$ K; ricordando che $\gamma = c_p / c_v = 5/3$.

$$\Delta U_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = 2310 J = -\Delta U_{AB}$$

poiché ΔU è nullo su un ciclo.

(c) $W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = -\Delta U_{AB} + nRT_{BC}\ln\frac{V_C}{V_B} = 168\ \mathrm{J}$

Prova 2

Esercizio 1

Corpo A

Si conserva energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_0 + mgd\,\mathrm{sen}\,\theta$$

da cui si ricava la velocità del corpo A alla sommità del piano inclinato:

$$v'_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gd\,\mathrm{sen}\,\theta} = 4.5\ \mathrm{m/s}$$

Nel moto uniformemente accelerato si ha che: $v_0' = v_0 - g\ \mathrm{sen}\ \theta \cdot t'$, da cui si ricava il tempo per raggiungere la sommità:

$$t' = \frac{v_0 - v'_0}{g\,\mathrm{sen}\,\theta} = 0.21\ \mathrm{s}$$

Nel successivo moto parabolico:

$$y_A(t) = d\cos\theta + v'_0\cos\theta \cdot t$$
$$z_A(t) = d\,\mathrm{sen}\,\theta + v'_0\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Per determinare il tempo nel quale il corpo torna sull'asse y, si pone $z_A(t) = 0$, ricavando

$$gt''^2 - 2v_0'\ \mathrm{sen}\ \theta \cdot t'' - 2d\ \mathrm{sen}\ \theta = 0$$

cioè:

$$t'' = \frac{v'_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{(v'_0\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - 2gd\,\mathrm{sen}\,\theta}}{g} = 1.0\ \mathrm{s}$$

Il tempo complessivo impiegato dal corpo A per tornare sull'asse y è pari a $t_f = t' + t'' = 1.2\ s$. La posizione di impatto con l'asse y è invece data da

$$y_f = y(t'') = d\cos\theta + v'_0\cos\theta \cdot t'' = 2.8\ \mathrm{m}$$

Corpo B

Nel moto uniformemente accelerato lungo l'asse y, si ha:

$$y_B(t) = v_1 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$

Il corpo B avrà la stessa coordinata y del corpo A, all'istante definito dalla relazione:

$$y_B(t'') = y_f \quad \text{da cui:} \quad y_f = v_1 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$

e quindi:

$$v_1 = \frac{2y_f + \mu_k g t_f^2}{2t_f} = 3.5\ \mathrm{m/s}$$

Esercizio 2

L'energia meccanica si conserva, e inoltre bisogna notare che il centro di massa scende di $l/3$:

$$\frac{mgl}{3} = \frac{I\omega^2}{2}$$

dove il momento di inerzia I vale:

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{6} = \frac{1}{9}ml^2$$

quindi si ricava la velocità angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}} = 98 \text{ rad/s}$$

Per il teorema dell'energia cinetica, $L = \Delta K$. Il lavoro totale è dato dalla somma del lavoro fatto dalle forze conservative più il lavoro fatto dalle forze non conservative: $W = W_C + W_{NC}$. Di conseguenza $\Delta K = W_C + W_{NC}$, quindi:

$$W_{NC} = \Delta K - W_C = \Delta K - \frac{mgl}{3} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{mgl}{3} = \frac{1}{2}I\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{mgl}{3}$$

sostituendo I e ricordando che $E_{diss} = -W_{NC}$ si ha $E_{diss} = 1/4\ mgl$, da cui

$$\frac{E_{diss}}{E_i} = \frac{\frac{1}{4}mgl}{\frac{mgl}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

cioè l'energia dissipata è il 75%.

Esercizio 3

Il gas assorbe calore nella prima isobara AB (avendo indicato la prima isobara a pressione maggiore, P_2) e cede calore nella seconda isobara CD. Nelle adiabatiche non si scambia calore. I quattro stati A, B, C, D sono di equilibrio:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = \frac{C_p}{R}(p_BV_B - p_AV_A) = \frac{C_p}{R}p_2(V_B - V_A)$$

$$Q_{ced} = |Q_{CD}| = \left|nC_p\right|(|T_C| - |T_D|) = \frac{|C_p|}{|R|}(|p_CV_C| - |p_DV_D|) = \frac{|C_p|}{|R|}|p_1|(|V_C| - |V_D|)$$

C_p è il calore specifico del gas a pressione costante.

Il rendimento vale quindi:

$$R = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{p_1}{p_2}\frac{|V_C - V_D|}{V_B - V_A} = 1 - \frac{p_1}{p_2}\frac{V_C}{V_B}\frac{|1 - V_D/V_C|}{1 - V_A/V_B}$$

Poiché gli stati di equilibrio B e C, e A e D giacciono su due curve adiabatiche reversibili: $p_2V_A^\gamma = p_1V_D^\gamma$, $p_2V_B^\gamma = p_1V_C^\gamma$, dove $\gamma = C_P/C_V$ da cui si deduce che

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} \quad \text{inoltre} \quad \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$$

Il rendimento vale dunque:

$$R = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0.24$$

Prova 3

Esercizio 1

(a) Si consideri un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale orientato verso destra (verso la massa m_3) e l'asse y verticale orientato verso l'alto. In assenza di attrito con il tavolo, il corpo 1 è soggetto alle tensioni $(-T_1, 0)$ e $(T_2, 0)$, alla forza di gravita $(0, -m_1g)$ e alla forza normale applicata dal piano $(0, N)$. Il corpo 2 è soggetto alla forza di gravità $(0, -m_2g)$ e alla tensione $(0, T_1)$. Ragionando in modo analogo per il corpo 3 si ottengono le tre equazioni seguenti:

$$-m_1g + N = 0\ ;\ -T_1 + T_2 = m_1a$$

$$-m_2g + T_1 = m_2a$$

$$-m_3g + T_2 = -m_3a$$

quindi, eliminando le tensioni:

$$a = \frac{(m_3 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3} = 4.2\ \mathrm{m/s^2}$$

(b) Tocca terra la massa 3.

(c) In presenza di attrito statico:

$$-m_1g + N = 0\ ;\ -T_1 + T_2 + f_a = 0\ ;\ -m_2g + T_1 = 0\ ;\ -m_3g + T_2 = 0\ ,$$
$$\text{quindi: } f_a = T_1 - T_2 = (m_2 - m_c)g = -3 \times 9.81\ \mathrm{N}.$$

Dalla $f_a = \mu N = \mu m_1 g$ si ricava che

$$\mu = \frac{|m_2 - m_3|}{m_1} = 1.5$$

(d) $N = m_1g = 20$ N.

Esercizio 2

Dalle equazioni cardinali della meccanica si ottiene: $mg - T = ma$, $TR = I\alpha$, da cui $T = Ma/2$. Sostituendo nella prima si ottiene: $a = gm/(m + M/2) = 2.8\ \mathrm{m/s^2}$ e $T = 7.0$ N.

L'angolo di rotazione in funzione del tempo è dato da:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{e ricordando che}$$

$$\theta = \frac{L}{R} \quad \text{si ottiene:} \quad L = \theta_0 R + \omega_0 R t + \frac{a}{2}t^2 = 31\ \mathrm{m}$$

Esercizio 3

$\gamma = c_p/c_v = 7/5$.
$\Delta U_{AB} = -W_{AB} = nC_V\,(T_A - T_B) = W$ è il lavoro compiuto dal sistema.
$n = 0.10$ mol, $V_A = 8.0 \times 10^{-3}$, siccome $T_A = p_AV_A/nR = 960$ K.
Trasformazione adiabatica: $T_AV_A^{\gamma-1} = T_BV_B^{\gamma-1}$ quindi $T_B = T_A(V_A/V_B)^{\gamma-1} = T_A(2)^{7/5-1} = 1270$ K.
$\Delta U = n(5/2)R(T_B - T_A) = 640$ J.

Prova 4

Esercizio 1

(a) L'energia meccanica si conserva:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

prima e nel contatto (alla massima compressione):

$$mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad x = v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

(b) La seconda massa si stacca dalla molla quando questa ripassa per la posizione di equilibrio, quindi il contatto con la molla dura mezzo periodo: $\Delta t = (T/2) = (\pi/\omega)$, dove ω è la pulsazione, dunque

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Infatti, siano x_1 e x_2 lo spostamento dalla relativa posizione di equilibrio; si ha che $x_1 - x_2 = x$, $F_1 = -kx$, $F_2 = kx$. Poiché $ma_1 = F_1$ e $ma_2 = F_2$, si ha che $F_1 - F_2 = m(a_1 - a_2) = -2kx$; inoltre

$$a_1 - a_2 = a \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(c) La velocità relativa è ancora $2v_0$, quindi si ha la stessa compressione calcolata in (a); nel momento della massima compressione il sistema è unico, di conseguenza le due masse hanno la stessa velocità. Dalla conservazione della quantità di moto nell'urto (proiezione sull'asse del moto): $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_f \rightarrow m2v_0 = (m + m)v_f$ da cui si ricava che $v_f = v_0$.

Esercizio 2

(a) La forza gravitazionale è centrale e dunque il momento angolare si conserva: $m_TR_Av_A = m_TR_Pv_P$, da cui si deduce $v_P = (R_A/R_P)v_A$. La forza gravitazionale è anche conservativa:

$$\frac{1}{2}m_Tv_P^2 - G\frac{m_TM_S}{R_P} = \frac{1}{2}m_Tv_A^2 - G\frac{m_TM_S}{R_A}$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda si ottiene

$$v_P = \sqrt{2GM_S\frac{R_A}{R_P(R_A + R_P)}}$$

da cui si deduce il momento angolare:

$$\vec{\mathbf{L}} = m_T\sqrt{2GM_S\frac{R_AR_P}{(R_A + R_P)}}\,\hat{\mathbf{u}}$$

dove $\hat{\mathbf{u}}$ è il versore perpendicolare al piano dell'orbita.
Il modulo di tale vettore vale: 2.66×10^{40} kg m^2/s.

(b) $v_A = 29.3 \times 10^3$ m/s $= 106 \times 10^3$ km/h, $v_P = 30.3 \times 10^3$ m/s $= 109 \times 10^3$ km/h. La velocità dell'orbita circolare si ricava da $m_Tv^2/R = Gm_TM_S/R^2$. Poiché $2\pi R = Tv$, dove $T = 3.1536 \times 10^7$ s (un anno!), si ha:

$$v = \left(\frac{2\pi GM_S}{T}\right)^{1/3} = 2.93 \times 10^5 \text{ m/s} = 107 \times 10^3 \text{ km/h}$$

(1.6% maggiore di v_A e 1.7% più bassa di v_P).

Esercizio 3

$$W = \int_i^f pdV = \int_i^f \frac{nRTdV}{V} = nRT\int_i^f \frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_f}{V_i} = 228 \text{ J}$$

Per la variazione di entropia si ha che $\Delta S = \Delta S_{\text{isoterma}} + \Delta S_{\text{adiabatica}}$, visto che il secondo termine è nullo, si ha $\Delta S = \Delta S_{\text{isot}} = W/T = nR\ln 2 = 0.91$ J/K.