CAPITOLO

10

Elasticità e oscillazioni

Concetti da rivedere

- Legge di Hooke (Paragrafo 3.6)
- Relazioni grafiche tra posizione, velocità e accelerazione (Paragrafi 2.2 e 2.3)
- Energia potenziale elastica (Paragrafo 6.7)
- Accelerazione radiale nel moto circolare (Paragrafo 5.2)
- Funzioni sinusoidali del tempo (Appendice A.7)

APPLICAZIONI BIOMEDICHE

- Struttura ossea; proprietà elastiche di ossa, tendini, legamenti e capelli (Paragrafi 10.2, 10.3, 10.4; Esempi 10.1, 10.2; Problemi 2, 9, 11, 12, 17)
- Osteoporosi (Paragrafo 10.3)
- Dipendenza della velocità di deambulazione dalla lunghezza della gamba (Esempio 10.10)
- Vibrazione del timpano (Problemi 37, 40)
- Proprietà elastiche del filo di ragnatela (Problemi 78, 79)

10.1 DEFORMAZIONI ELASTICHE NEI SOLIDI

Se la forza risultante e il momento meccanico risultante su un corpo sono nulli, il corpo è in equilibrio – ma ciò non significa che le forze e i momenti non producano alcun effetto. Un corpo si deforma quando a esso vengono applicate forze di contatto (Figura 10.1). Una **deformazione** è una variazione della dimensione

Figura 10.1 Una pallina da tennis viene schiacciata dalla forza di contatto esercitata su di essa dalle corde della racchetta da tennis. Allo stesso modo, le corde della racchetta vengono deformate dalla forza di contatto esercitata dalla pallina. Le due forze costituiscono una coppia di forze di azione e reazione.

o della forma di un corpo. Molti solidi sono talmente rigidi che la deformazione non può essere osservata a occhio nudo; per rivelare il cambiamento nelle dimensioni o nella forma è necessario un microscopio o un altro dispositivo sensibile.

Quando le forze di contatto vengono tolte, un corpo **elastico** ritorna alla sua forma e alle sue dimensioni originarie. Molti corpi sono elastici a condizione che le forze che ne causano la deformazione non siano troppo grandi. D'altro canto, un corpo può venire deformato permanentemente o anche rotto se le forze che agiscono sono troppo grandi. Un'automobile che urta contro un albero a bassa velocità può anche non danneggiarsi; ma a velocità maggiore la carrozzeria della macchina subisce una deformazione permanente e il guidatore può riportare una frattura ossea.

10.2 LEGGE DI HOOKE PER FORZE DI TRAZIONE E DI COMPRESSIONE

Supponiamo di tendere un filo applicando forze di trazione di intensità F a ciascuna estremità. La lunghezza del filo aumenta da L a $L + \Delta L$. In che modo l'allungamento ΔL dipende dalla lunghezza originaria L? L'Esempio 10.1 aiuta a fornire la risposta a questa domanda.

Esempio 10.1

Tendini in tensione

Se una data forza di trazione allunga un tendine di una quantità ΔL, di quanto la stessa forza allungherebbe un tendine di lunghezza doppia ma con lo stesso spessore e composizione?

Impostazione e soluzione Consideriamo il tendine di lunghezza $2L$ equivalente a due tendini di lunghezza L posti uno di seguito all'altro (Figura 10.2). Sottoposti alla stessa tensione, ciascuno dei due tendini immaginari si allunga di una quantità ΔL e quindi la deformazione totale del filo lungo è $2\Delta L$.

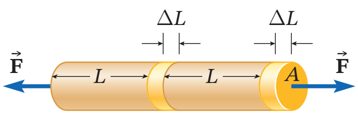


Figura 10.2 Due tendini identici sono uniti alle estremità e allungati da forze di trazione. Ogni tendine si allunga di una quantità ΔL.

Problema di verifica 10.1 Una molla tagliata a metà

Se una molla (di costante elastica k) viene tagliata a metà, qual è la costante elastica di ciascuna delle due nuove molle?

Quando vengono tesi dalle stesse forze di trazione, i due fili dell'Esempio 10.1 si allungano di una quantità proporzionale alla loro lunghezza originaria: $\Delta L \propto L$. In altre parole, i due fili subiscono la stessa *variazione relativa di lunghezza* $\Delta L/L$. La variazione relativa di lunghezza è chiamata **deformazione**; rappresenta una misura adimensionale dell'entità della modificazione.

Deformazione: variazione relativa di lunghezza.

$$\text{deformazione} = \frac{\Delta L}{L} \tag{10-1}$$

Supponiamo di avere a disposizione dei fili con la stessa composizione e lunghezza, ma di spessore diverso. Dovrebbero essere necessarie forze di trazione maggiori per allungare il filo più spesso della stessa entità di quello più sottile; è più difficile tendere un cavo di acciaio spesso rispetto a un sottile filo di acciaio della stessa lunghezza. Nel Quesito 13, si perviene alla conclusione che la forza di trazione necessaria è proporzionale all'area della sezione trasversale del filo ($F \propto A$). Pertanto, la stessa forza *per unità di area* produce la stessa deformazione su fili con la stessa composizione e lunghezza. La forza per unità di area è chiamata **sforzo**:

Sforzo: forza per unità di area della sezione trasversale.

$$\text{sforzo} = \frac{F}{A} \tag{10-2}$$

L'unità di misura SI dello sforzo è uguale a quella della pressione: N/m^2 o Pa.

Supponiamo che un corpo solido di lunghezza iniziale L sia sottoposto a una forza di trazione o di compressione di intensità F. Per effetto della forza, la lunghezza del corpo cambia di una quantità di modulo ΔL. In accordo alla legge di Hooke, la deformazione è proporzionale alla forza che la causa fino a quando essa non è eccessivamente grande:

$$F = k\,\Delta L \tag{10-3}$$

Nell'Equazione (10-3), k è una costante analoga alla costante elastica di una molla. Questa costante k dipende dalla lunghezza e dall'area della sezione trasversale del corpo. Una maggiore superficie A della sezione rende k più grande; una maggiore lunghezza L rende k più piccola.

Possiamo riscrivere la legge di Hooke in funzione dello sforzo (F/A) e della deformazione ($\Delta L/L$):

Legge di Hooke

$$\text{sforzo} \propto \text{deformazione}$$

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} \tag{10-4}$$

Legge di Hooke: la deformazione è proporzionale allo sforzo.

L'Equazione (10-4) esprime nuovamente il fatto che la variazione di lunghezza (ΔL) è proporzionale alla intensità della forza che causa la deformazione (F). Sforzo e deformazione tengono conto degli effetti della lunghezza e della sezione; la costante di proporzionalità Y dipende solo dalla rigidità intrinseca del materiale di cui è composto il corpo; è indipendente dalla lunghezza e dall'area della sezione trasversale. Confrontando le Equazioni (10-3) e (10-4), si ricava che la "costante elastica" k per il corpo è:

$$k = \frac{YA}{L} \tag{10-5}$$

La costante di proporzionalità Y nelle Equazioni (10-4) e (10-5) è chiamata **modulo di elasticità** o **modulo di Young**; Y ha la stessa unità di misura dello sforzo (Pa o N/m^2) in quanto la deformazione è adimensionale. Il modulo di Young può essere considerato come la rigidità intrinseca di un materiale; esso misura la resistenza che il materiale oppone a un allungamento o a una compressione. Un materiale flessibile e che si allunga facilmente (per es., la gomma) ha un modulo di Young *piccolo*. Un materiale rigido (come l'acciaio) ha un modulo di Young grande; è richiesto uno sforzo maggiore per ottenere la stessa deformazione. La Tabella 10.1 riporta il valore del modulo di Young di vari materiali comuni.

Tabella 10.1 Valori approssimati del modulo di Young di alcuni materiali

Materiale	Modulo di Young (10^9 Pa)	Materiale	Modulo di Young (10^9 Pa)
Gomma	0.002-0.008	Mattone	14-20
Cartilagine umana	0.024	Cemento	20-30 (compressione)
Vertebra umana	0.088 (compressione); 0.17 (trazione)	Marmo	50-60
Collagene, nell'osso	0.6	Alluminio	70
Tendine umano	0.6	Ghisa	100-120
Legno, trasversalmente alla venatura	1	Rame	120
Nylon	2-6	Ferro battuto	190
Filo di ragnatela	4	Acciaio	200
Femore umano	9.4 (compressione); 16 (trazione)	Diamante	1200
Legno, longitudinalmente alla venatura	10-15		

Mettiti alla prova 10.2

Quale corpo si allunga di più se sottoposto alla stessa tensione: un filo di acciaio lungo 2,0 m o un filo di rame lungo 1,0 m con lo stesso diametro? (Vedi Tabella 10.1.)

Elasticità dell'osso e del cemento

La legge di Hooke è valida fino a un valore massimo di sforzo denominato *limite di proporzionalità*. Per molti materiali, il modulo di Young ha lo stesso valore sia per trazione che per compressione. Alcuni materiali composti, come l'osso e il cemento, presentano moduli di Young per trazione e compressione significativamente diversi. Le componenti dell'osso comprendono fibre di collagene (una proteina che si trova in tutto il tessuto connettivo) che forniscono resistenza alla trazione e cristalli di idrossiapatite (composti di calcio e di fosfati) che forniscono resistenza alla compressione. Le proprietà differenti di queste due sostanze portano a valori diversi per il modulo di Young per trazione e per compressione.

Esempio 10.2

Compressione del femore

Un uomo di peso 0.80 kN è in posizione eretta (Figura 10.3). Di quanto si accorcia approssimativamente il suo femore rispetto a quando è in posizione distesa? Si assuma che la forza di compressione su ciascun femore sia circa la metà del peso. L'area media della sezione trasversale del femore è 8.0 cm^2 e la lunghezza del femore in posizione distesa è 43.0 cm.

Impostazione Un cambiamento di lunghezza del femore corrisponde a una deformazione. Dopo avere determinato lo sforzo e avere considerato il modulo di Young, possiamo trovare la deformazione usando la legge di Hooke. Assumiamo che ciascun femore sostiene *metà* del peso dell'uomo.

Soluzione La deformazione è proporzionale allo sforzo:

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L}$$

Risolvendo questa equazione per ΔL si ottiene:

$$\Delta L = \frac{F/A}{Y}L$$

Dalla Tabella 10.1, il modulo di Young per un femore *in compressione* è:

$$Y = 9.4 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Bisogna convertire in m^2 il valore dell'area della sezione trasversale in quanto 1 Pa = 1 N/m^2:

$$A = 8.0\ \text{cm}^2 \times \left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)^2$$
$$= 0.00080\ \text{m}^2$$

La forza che agisce su ciascuna gamba è 0.40 kN, ovvero 4.0×10^2 N. La variazione di lunghezza è quindi

$$\Delta L = \frac{F/A}{Y} L$$
$$= \frac{\frac{(4.0 \times 10^2\ \text{N})}{(0.00080\ \text{m}^2)}}{9.4 \times 10^9\ \text{Pa}} \times 43.0\ \text{cm}$$
$$= 5.3 \times 10^{-5} \times 43.0\ \text{cm}$$
$$= 0.0023\ \text{cm}$$

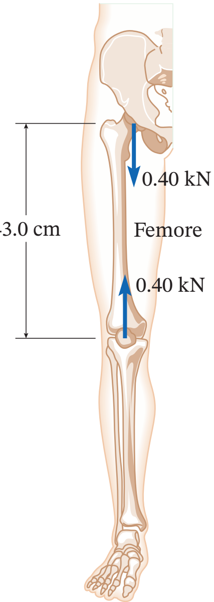


Figura 10.3 Compressione del femore.

Discussione La deformazione – o variazione relativa di lunghezza – è 5.3×10^{-5}. Poiché la deformazione è molto minore di 1, è ammissibile non preoccuparsi se la lunghezza sia 43.0 cm con o senza il carico di compressione; otterremmo lo stesso valore di ΔL (con due cifre significative) in ambedue i casi.

Problema di verifica 10.2 Variazione relativa di lunghezza di un cavo

Un cavo di acciaio di diametro 3.0 cm sostiene un carico di 2.0 kN. Qual è l'aumento relativo di lunghezza del cavo rispetto alla lunghezza senza carico se $Y = 2.0 \times 10^{11}$ Pa?

10.3 OLTRE LA LEGGE DI HOOKE

Se lo sforzo di trazione o di compressione supera il limite di proporzionalità, la deformazione non è più proporzionale allo sforzo (Figura 10.4). Il solido si riporta ancora alla sua lunghezza originaria quando lo sforzo viene tolto a condizione che lo sforzo non superi il *limite di elasticità*. Se lo sforzo supera il limite di elasticità, il materiale rimane deformato permanentemente. In corrispondenza di sforzi ancora più grandi, il solido si frattura quando lo sforzo raggiunge il *carico di rottura*. Lo sforzo massimo che può essere sopportato senza rottura è chiamato *limite di resistenza*. Il limite di resistenza a compressione e a trazione può essere diverso; ci riferiremo quindi alla resistenza a compressione o alla resistenza a trazione del materiale.

Un materiale *duttile* continua ad allungarsi oltre la sua resistenza a trazione senza rompersi; superato il limite di resistenza, lo sforzo *diminuisce* (Figura 10.4a). Esempi di solidi duttili sono i metalli relativamente soffici, come l'oro, l'argento, il rame e il piombo. Questi metalli possono venire allungati come caramelle gommose, diventando sempre più sottili fino a quando raggiungono il carico di rottura.

Proprietà elastiche dell'osso e osteoporosi

Per una sostanza *fragile*, il limite di resistenza e il carico di rottura sono molto simili (Figura 10.4b). L'osso è un esempio di materiale fragile; si frattura subito se lo sforzo diventa troppo grande. Sia se sottoposto a trazione che a compressione, il suo limite di elasticità, il suo carico di rottura e la sua resistenza sono approssimativamente uguali. Per compressione, sforzo e deformazione sono all'incirca proporzionali fino al carico di rottura, mentre per trazione è presente una evidente deviazione dalla legge di Hooke (Figura. 10.4c). I bambini hanno ossa molto più flessibili degli adulti perché hanno accumulato una minore quantità di idrossiapatite, un composto del calcio. Quando una persona invecchia, le sue ossa diventano più fragili in quanto le fibre di collagene perdono flessibilità e le sue ossa diventano anche più deboli in quanto il calcio viene riassorbito (una condizione chiamata osteoporosi).

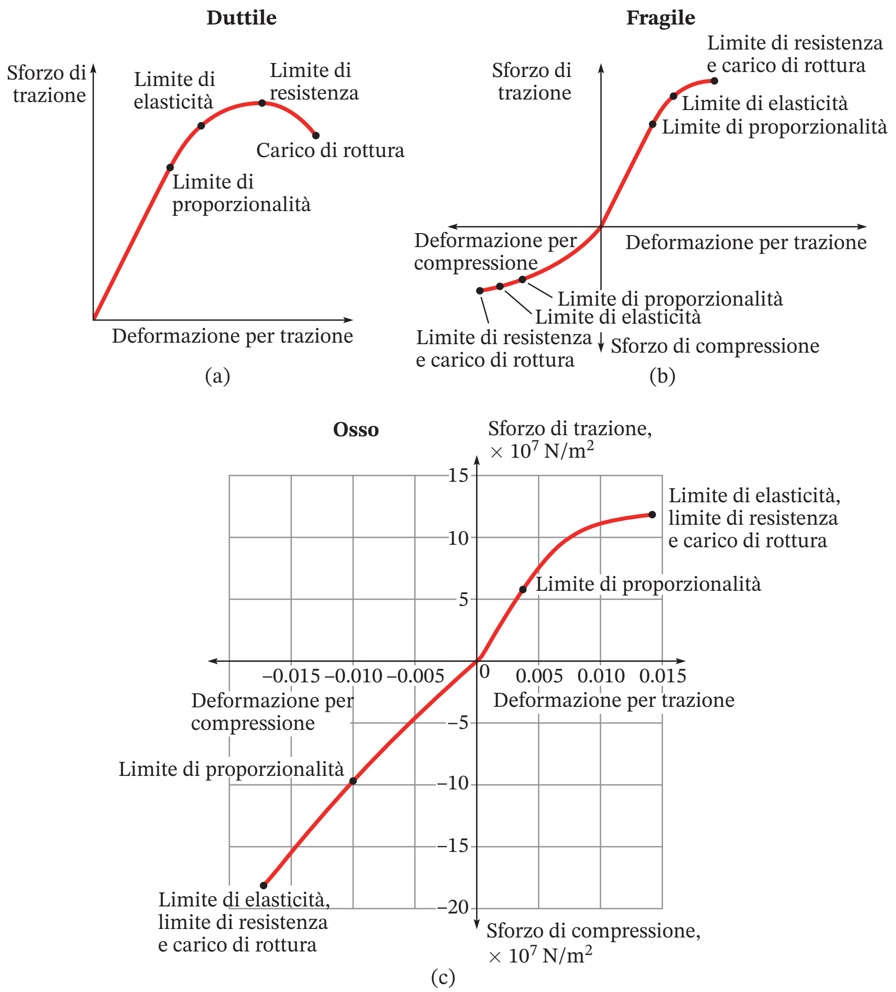


Figura 10.4 Grafico sforzo-deformazione che mostra i limiti per (a) un materiale duttile, (b) un materiale fragile e (c) l'osso compatto. Il limite di elasticità, il limite di resistenza e il carico di rottura sono ben distinti per i materiali duttili, ma sono molto simili per un materiale fragile.

©Steve Tulley/Alamy Stock Photo

Figura 10.5 Resti del muro di Berlino. La quarta e ultima fase di costruzione (1975-1980) ha impiegato circa 45 000 pannelli di cemento armato. Ogni pannello era alto 3.6 m e largo 1.2 m.

Resistenza dei materiali da costruzione

Come l'osso, il cemento ha un componente per la resistenza a trazione e un altro per la resistenza a compressione. Il cemento armato contiene barre di acciaio che forniscono la resistenza a trazione che manca al cemento (Figura 10.5). Nel cemento precompresso, le barre di acciaio vengono messe in trazione quando il cemento viene versato. Dopo che il cemento si è solidificato, la struttura che mantiene le barre in trazione viene rimossa. Le barre si contraggono, comprimendo il cemento. Quindi, quando il cemento precompresso è sottoposto a una forza di trazione, la compressione del cemento viene ridotta ma non eliminata, in modo tale che il cemento stesso non è mai sottoposto a uno sforzo di trazione.

Esempio 10.3

Una gru con cavo in acciaio

Una gru deve sollevare carichi fino a 1.0×10^5 N (11 tonnellate). (a) Qual è il diametro minimo del cavo in acciaio che deve essere utilizzato? (b) Se viene usato un cavo con il diametro doppio del minimo e lungo 8.0 m in assenza di carico, di quanto si allunga il cavo quando sostiene un carico di 1.0×10^5 N? (Dati per l'acciaio: $Y = 2.0 \times 10^{11}$ Pa; limite di proporzionalità $= 2.0 \times 10^8$ Pa; limite di elasticità $= 3.0 \times 10^8$ Pa; resistenza a trazione $= 5.0 \times 10^8$.)

Impostazione I dati forniti per l'acciaio consistono di quattro grandezze che hanno tutte la stessa unità di misura. Sarebbe facile confonderle se non avessimo compreso cosa rappresenta ciascuna di esse. Il modulo di Young è la costante di proporzionalità tra sforzo e deformazione. Questo sarà utile nella parte (b), dove si determinerà l'allungamento del cavo; l'allungamento è il prodotto tra la deformazione e la lunghezza originaria. Tuttavia, prima di usare il modulo di Young per trovare la deformazione, dobbiamo verificare che lo sforzo è inferiore al limite di proporzionalità.

Il limite di elasticità è il massimo sforzo che non produce deformazione permanente; la resistenza a trazione è lo sforzo massimo che non comporta la rottura del cavo. Sicuramente non vogliamo che il cavo si rompa, ma sarebbe prudente mantenere lo sforzo al di sotto del limite di elasticità in modo tale che il cavo possa essere utilizzato a lungo. Pertanto, nel punto (a) scegliamo un diametro minimo che mantenga lo sforzo al di sotto del limite di elasticità.

Soluzione (a) Scegliamo il diametro minimo che mantiene lo sforzo al di sotto del limite di elasticità:

$$\frac{F}{A} < \text{limite di elasticità} = 3.0 \times 10^8 \text{ Pa}$$

per $F = 1.0 \times 10^5$ N. Quindi:

$$A > \frac{F}{\text{limite di elasticità}} = \frac{1.0\times10^5 \text{ N}}{3.0\times10^8 \text{ Pa}} = 3.33\times10^{-4} \text{m}^2$$

La minima area della sezione trasversale è correlata al diametro minimo. L'area della sezione trasversale del cavo è πr^2 o $\pi d^2/4$, quindi:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\times3.33\times10^{-4} \text{ m}^2}{\pi}} = 2.1 \text{ cm}$$

Il *diametro* minimo è pertanto 2.1 cm.

(b) Se raddoppiamo il diametro e manteniamo lo stesso carico, lo sforzo si riduce di un fattore quattro perché l'area della sezione trasversale è proporzionale al quadrato del diametro. Pertanto, lo sforzo è:

$$\frac{F}{A} = \frac{3.0\times10^8 \text{ Pa}}{4} = 7.5\times10^7 \text{ Pa}$$

La deformazione è quindi:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{Y} = \frac{7.5\times10^7 \text{ Pa}}{2.0\times10^{11} \text{ Pa}} = 0.000375$$

La deformazione è la variazione relativa di lunghezza. La variazione di lunghezza è quindi:

$$\begin{aligned}\Delta L &= 0.000375L = 0.000375 \times 8.0 \text{ m}\\ &= 0.0030 \text{ m} = 3.0 \text{ mm}\end{aligned}$$

Discussione Utilizzando un cavo con spessore doppio rispetto al minimo, otteniamo un fattore di sicurezza. Non vogliamo trovarci proprio al limite di un disastro! Poiché raddoppiando il diametro del cavo l'area della sezione trasversale del cavo aumenta di un fattore quattro, lo sforzo massimo sul cavo è 1/4 del limite di elasticità.

Problema di verifica 10.3 L'accordatura di una corda di arpa

Una corda di arpa è realizzata in ottone (modulo di Young 9.0×10^{10} Pa, resistenza a trazione 6.3×10^8 Pa). Quando viene accordata correttamente, la tensione nella corda è 59.4 N, che è il 93% della massima tensione che la corda può sopportare senza rompersi. Qual è il raggio della corda?

Colonna vertebrale

L'anatomia umana presenta particolari caratteristiche per adattarsi allo sforzo di compressione associato alla posizione eretta. Per esempio, nella colonna vertebrale la dimensione delle vertebre aumenta gradualmente dal collo verso il bacino. Con tale accorgimento le vertebre più resistenti si trovano nelle posizioni inferiori, dove devono sostenere un peso maggiore. Le vertebre sono separate da dischi pieni di fluido, che producono un effetto cuscinetto distribuendo verso l'esterno le forze di compressione.

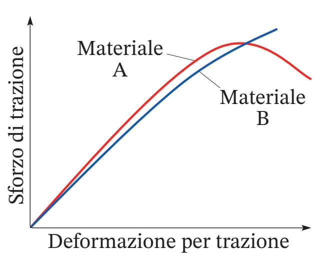


Figura 10.6 Grafici sforzo-deformazione per due distinti materiali.

Mettiti alla prova 10.3

I grafici sforzo-deformazione per due diversi materiali sono mostrati nella Figura 10.6. Ogni grafico termina al punto di rottura per quel materiale. (a) Quale dei due materiali ha il modulo di Young più grande? (b) Quale dei due materiali ha il limite di elasticità più grande?

Limiti all'altezza

Cosa pone un limite all'altezza di una colonna in pietra? Se la colonna è troppo alta, potrebbe frantumarsi a causa del suo stesso peso. La massima altezza di una colonna è limitata perché lo sforzo di compressione alla base non può superare la resistenza a compressione del materiale (vedi Problema 95). Tuttavia, la massima altezza in corrispondenza della quale una colonna verticale cede è generalmente inferiore all'altezza alla quale dovrebbe frantumarsi.

Struttura ossea

Le ossa dei nostri arti sono cave; l'interno del materiale strutturale è pieno di midollo, che è strutturalmente debole. Un osso cavo resiste a fratture causate da forze di torsione e piegamento meglio di un osso pieno con la stessa quantità di materiale strutturale, sebbene l'osso cavo si deformi più facilmente a causa di una forza di compressione lungo l'asse centrale.

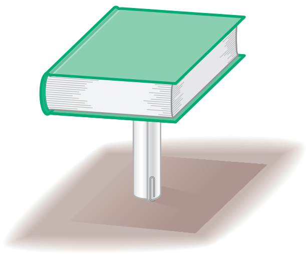


Figura 10.7 Una colonna realizzata con un foglio di carta arrotolato può sostenere un libro.

LA FISICA NEL QUOTIDIANO

Sfida un amico a usare un singolo foglio di carta formato A4 e due fermagli (o del nastro adesivo) per sostenere un libro a un'altezza di almeno 20 cm sopra un tavolo. Se il tuo amico non ha idea su come fare, arrotola il foglio di carta in un cilindro di circa 2.5 cm di diametro; fissa quindi il cilindro in cima e alla base con i fermagli (o col nastro adesivo). Posiziona con attenzione il libro in modo tale che sia in equilibrio sulla cima del cilindro (Figura 10.7). Se incontri difficoltà, prova a usare carta più spessa o un libro più leggero.

Usa lo stesso "apparato" per acquisire una certa comprensione sul cedimento delle colonne. Prova a realizzare il cilindro di carta con un diametro doppio. Le pareti di questa colonna sono più sottili perché c'è un minor numero di strati di carta nella parete del cilindro, sebbene la stessa superficie *di carta* sostenga il libro. Se non succede nulla, prova di nuovo con un libro più pesante. Probabilmente vedrai le pareti accartocciarsi su se stesse quando il cilindro cede e il libro cade sul tavolo.

Limiti alle dimensioni degli organismi viventi

Perché la costituzione delle ossa di un gigante deve essere diversa da quella delle ossa umane? Se la densità media del gigante è la stessa di quella dell'uomo, allora il suo peso è più grande dello stesso fattore di cui è più grande il *volume*. Se il gigante è cinque volte più alto dell'uomo, per esempio, e ha le stesse proporzioni relative, allora il suo volume è $5^3 = 125$ volte maggiore, poiché ciascuna delle tre dimensioni di ogni parte del corpo è aumentata di un fattore cinque. D'altra parte, l'area della sezione trasversale di un osso è proporzionale al *quadrato* del suo raggio. Quindi, mentre le ossa delle gambe devono sostenere un peso 125 volte maggiore, la massima forza di compressione che sono in grado di sopportare è aumentata solo di un fattore 25. Il gigante avrebbe bisogno di gambe molto più grosse (rispetto alla loro lunghezza) per sostenere questo aumento di peso. Una simile analisi può essere applicata alle forze di torsione e piegamento che hanno maggiore probabilità delle forze di compressione di rompere le ossa. Il risultato è lo stesso: le ossa di un gigante non possono avere proporzioni umane.

In alcuni film di fantascienza o dell'orrore gli insetti giganti sono rappresentati come versioni molto ingrandite di un insetto normale. Le gambe di un tale insetto gigante crollerebbero sotto il peso dell'insetto.

10.4 DEFORMAZIONI DI TAGLIO E DI VOLUME

In questo paragrafo consideriamo altri due tipi di deformazione. In ciascun caso definiamo uno sforzo (forza per unità di area), una deformazione (adimensionale), e un modulo (la costante di proporzionalità tra sforzo e deformazione).

Deformazione di taglio

A differenza delle forze di trazione e di compressione, che sono perpendicolari a due superfici opposte di un corpo, una deformazione di taglio è il risultato di una coppia di forze uguali e opposte che agiscono in direzione *parallela* a due superfici opposte. Consideriamo un libro posato su una scrivania. Se spingiamo orizzontalmente sulla copertina superiore del libro mentre spingiamo nel verso opposto sulla copertina inferiore per mantenerlo fermo, il libro viene deformato come mostrato in Figura 10.8. Tale tipo di deformazione è chiamata **deformazione di taglio**.

Le forze di taglio producono lo stesso tipo di deformazione in un corpo solido; l'entità della deformazione è tuttavia inferiore. Lo **sforzo di taglio** è il rapporto tra l'intensità della forza di taglio e l'area della superficie sulla quale agisce la forza:

$$\text{sforzo di taglio} = \frac{\text{forza di taglio}}{\text{area della superficie}} = \frac{F}{A} \qquad \text{(10-6)}$$

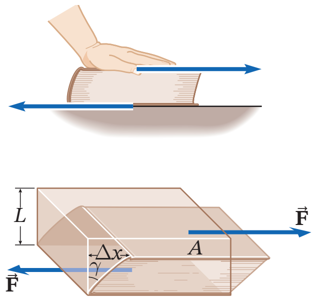


Figura 10.8 Un libro sottoposto a sforzo di taglio.

La **deformazione di taglio** è il rapporto tra lo spostamento relativo Δx e la distanza L tra le due superfici:

$$\text{deformazione di taglio} = \frac{\text{spostamento delle superfici}}{\text{distanza tra le superfici}} = \frac{\Delta x}{L} \qquad \text{(10-7)}$$

La deformazione di taglio è proporzionale allo sforzo di taglio a condizione che lo sforzo non sia troppo grande. La costante di proporzionalità è il **modulo di scorrimento *S***.

Legge di Hooke per la deformazione di taglio

$$\text{sforzo di taglio} \propto \text{deformazione di taglio}$$

$$\frac{F}{A} = S\frac{\Delta x}{L} \qquad \text{(10-8)}$$

L'unità di misura dello sforzo di taglio e del modulo di scorrimento è uguale a quella dello sforzo di trazione o compressione e del modulo di Young: Pa o N/m^2. La deformazione è ancora una volta adimensionale. La Tabella 10.2 riporta il modulo di taglio di vari materiali.

Tabella 10.2 Modulo di scorrimento e modulo di compressione di alcuni materiali

Materiale	Modulo di scorrimento S (10^9 Pa)	Modulo di compressione B (10^9 Pa)
Gas		
Aria (1)	0.00010	
Aria (2)	0.00014	
Liquidi		
Etanolo	0.9	
Acqua	2.2	
Mercurio	25	
Solidi		
Ghisa	40-50	60-90
Marmo	70	
Alluminio	25-30	70
Rame	40-50	120-140
Acciaio	80-90	140-160
Diamante	620	

(1) A 0 °C e a 1 atm; dilatazione o compressione a temperatura costante.
(2) A 0 °C e a 1 atm; dilatazione o compressione adiabatica.

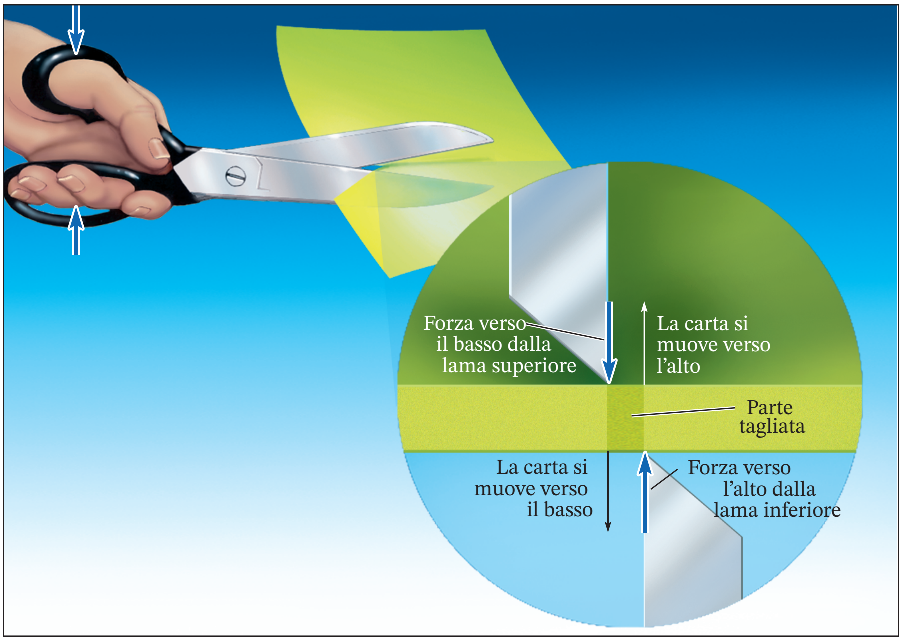


Figura 10.9 Le forbici esercitano uno sforzo di taglio su un foglio di carta. Lo sforzo di taglio è il rapporto tra la forza esercitata da una lama e l'area della sezione trasversale della carta – lo spessore della carta moltiplicato per la lunghezza della lama che è in contatto con la carta.

Un esempio di sforzo di taglio è costituito dal movimento di un paio di forbici che tagliano un foglio di carta. Le forze che agiscono sulla carta da sopra e da sotto si controbilanciano l'un l'altra e agiscono in direzione parallela alle superfici trasversali della carta (Figura 10.9).

Esempio 10.4

Tagliare la carta

Un foglio di carta di spessore 0.20 mm viene tagliato con delle forbici che hanno lame lunghe 10.0 cm e spesse 0.20 cm. Mentre taglia, ciascuna lama delle forbici esercita una forza di 3.0 N sulla carta; la lunghezza di ciascuna lama in contatto con la carta è circa 0.5 mm. Qual è lo sforzo di taglio sulla carta?

Impostazione Lo sforzo di taglio è il rapporto tra una forza e un'area. In questo problema, è difficile identificare correttamente l'area. Le lame spingono in verso opposto due superfici di carta *trasversali*, e quindi queste vengono spostate l'una rispetto all'altra. Lo sforzo di taglio è il rapporto tra la forza esercitata da ciascuna lama e l'area di questa sezione trasversale – il prodotto tra lo spessore della carta e la lunghezza della lama *in contatto con la carta*. La lunghezza totale e lo spessore delle lame sono irrilevanti.

Soluzione L'area della sezione trasversale è:

$$A = \text{spessore} \times \text{lunghezza in contatto}$$
$$= 2.0 \times 10^{-4}\ \text{m} \times 5 \times 10^{-4}\ \text{m} = 1 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$$

Lo sforzo di taglio è:

$$\frac{F}{A} = \frac{3.0\ \text{N}}{1 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 30\ \text{MPa}$$

Discussione Per identificare correttamente l'area, ricordiamo che le forze di taglio agiscono *sul piano delle* superfici che vengono spostate l'una rispetto all'altra. Le forze di trazione e di compressione sono invece perpendicolari all'area utilizzata per determinare gli sforzi di trazione e di compressione.

Problema di verifica 10.4 Lo sforzo di taglio dovuto a una punzonatrice

Una punzonatrice ha un diametro di 8.0 mm e comprime 10 fogli di carta con una forza di 6.7 kN. Se lo spessore di ciascun foglio di carta è 0.20 mm, trovare lo sforzo di taglio. (*Aiuto*: prestare attenzione nel decidere quale area utilizzare. Si ricordi che una forza di taglio agisce in direzione *parallela* alla superficie la cui area è di interesse.)

Quando viene storto, un osso è sottoposto a uno sforzo di taglio. Lo sforzo di taglio è una causa di frattura più comune di uno sforzo di compressione o di trazione che agisce per tutta la lunghezza dell'osso. La torsione di un osso può provocare una frattura a spirale (Figura 10.10).

Frattura a spirale

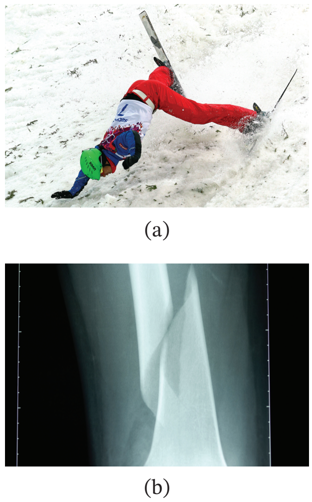


Figura 10.10 (a) Uno sciatore cade e la sua gamba è sottoposta a uno sforzo di taglio.
(b) Radiografia di una frattura a spirale della tibia.

Deformazione di volume

Come discusso nel Capitolo 9, un fluido esercita su un corpo solido immerso forze verso l'interno. Tali forze sono perpendicolari alle superfici del corpo. Poiché il fluido preme verso l'interno su tutti i lati del corpo (Figura 10.11), il solido viene compresso – il suo volume è ridotto. La pressione del fluido P è la forza per unità di area; può essere considerata come lo **sforzo di volume** sul corpo solido. La pressione ha la stessa unità di misura degli altri tipi di sforzo: N/m^2 o Pa.

$$\text{sforzo di volume} = \text{pressione} = \frac{F}{A} = P$$

La conseguente deformazione del corpo è caratterizzata dalla **deformazione di volume**, che rappresenta la variazione relativa di volume:

$$\text{deformazione di volume} = \frac{\text{variazione di volume}}{\text{volume originario}} = \frac{\Delta V}{V} \qquad \text{(10-9)}$$

Se lo sforzo non è troppo grande, lo sforzo e la deformazione sono proporzionali secondo una costante di proporzionalità chiamata **modulo di compressione** B. È più difficile comprimere una sostanza con un modulo di compressione elevato, che non una sostanza con un modulo di compressione piccolo.

Un corpo alla pressione atmosferica si trova già sottoposto a uno sforzo di volume: la pressione dell'aria comprime già leggermente il corpo rispetto a quello che sarebbe il suo volume nel vuoto. Per i solidi e i liquidi, la deformazione di volume dovuta alla pressione atmosferica è, per la maggior parte delle applicazioni, trascurabilmente piccola (5×10^{-5} per l'acqua). Poiché abitualmente abbiamo a che fare con la deformazione dovuta a una *variazione* di pressione rispetto alla pressione atmosferica, possiamo scrivere la legge di Hooke come:

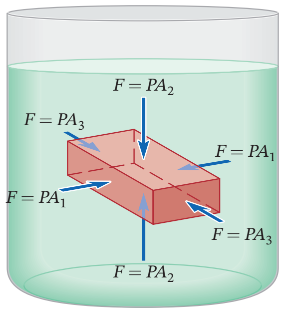


Figura 10.11 Le forze su un corpo quando è immerso in un fluido.

Legge di Hooke per la deformazione di volume

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} \qquad \text{(10-10)}$$

dove V è il volume alla pressione atmosferica. Il segno negativo nell'Equazione (10-10) permette di mantenere positivo il modulo di compressione – un aumento dello sforzo di volume provoca una *diminuzione* di volume, quindi ΔV è negativo. La Tabella 10.2 riporta il modulo di compressione di varie sostanze.

A differenza degli sforzi e delle deformazioni discussi in precedenza, lo sforzo di volume può essere applicato ai fluidi (liquidi e gas) così come ai solidi. Il modulo di compressione dei liquidi non è in generale molto minore di quello dei solidi, perché gli atomi nei liquidi sono tanto vicini tra di loro quasi quanto lo sono quelli nei solidi. Nel Capitolo 9 abbiamo assunto che i liquidi fossero incomprimibili, il che risulta essere spesso una buona approssimazione, poiché il modulo di compressione dei liquidi è solitamente grande. Nei gas, gli atomi sono in media molto più distanti tra di loro di quanto non lo siano nei solidi o nei liquidi. È molto più facile comprimere i gas che i solidi o i liquidi, quindi il loro modulo di compressione è molto più piccolo.

Esempio 10.5

Una statua di marmo sott'acqua

Una statua di marmo di volume 1.5 m^3 viene trasportata su una nave da Atene a Cipro. La statua precipita nell'oceano quando un'onda di marea provocata da un terremoto fa affondare la nave; la statua finisce sul fondo dell'oceano, 1.0 km al di sotto della superficie. Trovare la variazione di volume della statua, in cm^3, dovuta alla pressione dell'acqua. La densità dell'acqua di mare è 1025 kg/m^3.

Impostazione La pressione dell'acqua è lo sforzo di volume; è la forza per unità di area che preme verso l'interno perpendicolarmente a tutte le superfici della statua. La pressione dell'acqua a profondità d è maggiore della pressione in superficie; possiamo trovare la pressione utilizzando la densità nota dell'acqua di mare. Quindi, usando il modulo di compressione del marmo riportato in Tabella 10.2, troviamo la variazione di volume tramite la legge di Hooke.

Soluzione La pressione a una profondità $d = 1.0$ km è maggiore della pressione atmosferica di:

$$\begin{aligned}\Delta P &= \rho g d \\ &= 1025 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ N/kg} \times 1000 \text{ m} \\ &= 1.005 \times 10^7 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Secondo la Tabella 10.2, il modulo di compressione per il marmo è 70×10^9 Pa. Questa è la costante di proporzionalità tra lo sforzo di volume (aumento di pressione) e la deformazione (variazione relativa di volume).

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V}$$

Risolvendo per ΔV:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{\Delta P}{B}V = -\frac{1.005\times10^7 \text{ Pa}}{70\times10^9 \text{ Pa}}\times 1.5 \text{ m}^3 \\ &= -2.2\times10^{-4} \text{ m}^3 \times\left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right)^3 = -220 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Il volume della statua diminuisce di circa 220 cm^3.

Discussione La diminuzione relativa di volume è:

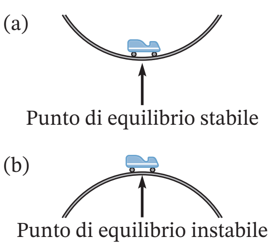
$$\frac{1.005\times10^7 \text{ Pa}}{70\times10^9 \text{ Pa}} \approx \frac{1}{7000}$$

ovvero una riduzione dello 0.014%.

Nel calcolare l'aumento di pressione, abbiamo fatto l'ipotesi che la densità dell'acqua di mare fosse costante – l'equazione $\Delta P = \rho g d$ è stata ricavata per un fluido con densità costante ρ. Dobbiamo temere che il nostro calcolo di ΔP sia sbagliato? Il risultato del Problema di verifica 10.5 mostra che la densità dell'acqua di mare a una profondità di 1.0 km è più grande della sua densità in superficie solo dello 0.43%. L'errore nel calcolo di ΔP è inferiore allo 0.5% – in questo caso trascurabile poiché conosciamo la profondità con due sole cifre significative.

Problema di verifica 10.5 La compressione dell'acqua

Dimostrare che un aumento di pressione di 1.0×10^7 Pa (100 atm) su 1 m^3 di acqua di mare fa diminuire il volume dello 0.43%. Il modulo di compressione dell'acqua di mare è 2.3×10^9 Pa.



10.5 MOTO ARMONICO SEMPLICE

L'oscillazione, uno dei più comuni tipi di moto, è un movimento avanti e indietro ripetuto lungo lo stesso percorso. Le oscillazioni si verificano in prossimità di un punto di **equilibrio stabile**. Un punto di equilibrio è *stabile* se la forza risultante su un corpo, quando questo viene spostato di poco dall'equilibrio, è diretta verso il punto di equilibrio. (Figura 10.12). Tale tipo di forza è denominata **forza di richiamo** perché tende a ripristinare l'equilibrio.

Figura 10.12 (a) Un punto di equilibrio *stabile* per un vagoncino delle montagne russe. Se il vagoncino viene spostato leggermente dalla sua posizione nel punto più basso del binario, la forza risultante richiama il vagoncino indietro verso la posizione di equilibrio. (b) Un punto di equilibrio *instabile* per un vagoncino delle montagne russe. Se il vagoncino viene spostato leggermente dal punto più alto del binario, la forza risultante *allontana* il vagoncino dalla posizione di equilibrio.

Un particolare tipo di moto oscillatorio – chiamato **moto armonico semplice** – si presenta ogniqualvolta la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. La molla ideale è il modello preferito dai fisici perché la forza di richiamo che essa produce è proporzionale allo spostamento dall'equilibrio ($F_x = -kx$). Come abbiamo visto nei Paragrafi 10.2-10.4, la legge di Hooke si applica a piccole deformazioni di molti tipi di corpi, non solo alle molle. Pertanto, il moto armonico semplice si presenta in molte situazioni a condizione che le oscillazioni non siano molto grandi.

Moto armonico semplice: moto oscillatorio che si manifesta quando la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento dall'equilibrio.

La Figura 10.13 riporta la curva $F(x)$ per una data forza di richiamo. Poiché l'andamento non è lineare, le oscillazioni risultanti non seguono un moto armonico semplice – a meno che l'ampiezza non sia piccola. Per piccole ampiezze, possiamo approssimare la curva $F(x)$ in prossimità dell'equilibrio con la retta tangente alla curva nel punto di equilibrio. Per oscillazioni di piccola ampiezza la forza di richiamo è approssimativamente lineare, quindi le oscillazioni risultanti seguono (approssimativamente) un moto armonico semplice.

Consideriamo una molla ideale a riposo con costante elastica k e priva di massa. Un estremo della molla è fisso e all'altro estremo è attaccato un corpo di massa m (Figura 10.14) che si muove senza attrito. Poiché la forza di contatto normale è uguale e opposta al peso del corpo, la forza risultante sul corpo è quella dovuta alla molla. Quando la molla è a riposo, la forza risultante è zero; il corpo è in equilibrio.

Se adesso il corpo viene tirato verso destra fino alla posizione $x = A$ e quindi lasciato libero, la forza risultante sul corpo è:

$$F_x = -kx \qquad \text{(10-11)}$$

dove il segno negativo indica che la forza della molla è nel verso opposto allo spostamento dall'equilibrio. Inizialmente il corpo è a destra rispetto alla posizione di equilibrio e la molla tira verso sinistra. Si noti che la forza esercitata dalla molla è orientata nel verso corretto per riportare il corpo nella posizione di equilibrio; la molla spinge o tira sempre verso il punto di equilibrio.

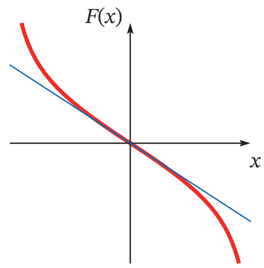


Figura 10.13 Una forza di richiamo non lineare (in rosso) può venire approssimata con una forza di richiamo lineare (in blu) per piccoli spostamenti.

Immaginiamo di eseguire una serie di fotografie a intervalli di tempo uguali mentre il corpo oscilla avanti e indietro. In Figura 10.15 i punti in blu rappresentano le posizioni del corpo a intervalli di tempo uguali per metà di un ciclo completo, da un estremo all'altro. (Un ciclo completo comprenderebbe il percorso di ritorno.)

Analisi dell'energia nel moto armonico semplice

La Figura 10.15 indica che la velocità è massima quando il corpo passa per la posizione di equilibrio. Il corpo rallenta quando si avvicina agli estremi e la sua velocità aumenta quando si avvicina al punto di equilibrio. In corrispondenza degli estremi ($x = \pm A$), è per un istante a riposo prima di dirigersi indietro nel verso opposto. Queste osservazioni sono confermate dalla conservazione dell'energia. L'energia meccanica totale della massa e della molla è costante.

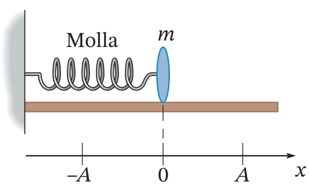


Figura 10.14 Una molla nella posizione a riposo.

$$E = K + U = \text{costante}$$

dove K è l'energia cinetica e U è l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla. Mentre il corpo oscilla avanti e indietro, l'energia viene convertita da potenziale a cinetica e di nuovo in potenziale durante la metà di un ciclo mostrata in Figura 10.15. Dal Paragrafo 6.7, l'energia potenziale elastica della molla è:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(6-24)}$$

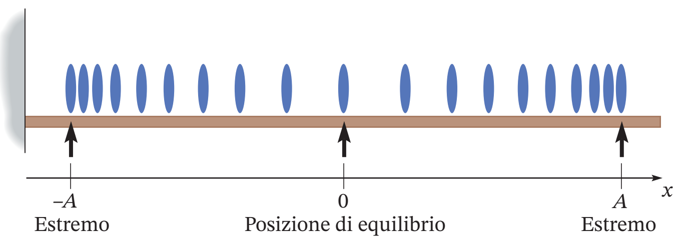


Figura 10.15 Le posizioni di un corpo che oscilla registrate a intervalli di tempo uguali durante metà periodo. Per semplicità la molla non è stata disegnata.

La velocità in ogni punto x può essere ricavata dall'equazione dell'energia:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(10-12)}$$

Ampiezza: spostamento massimo rispetto all'equilibrio.

Lo spostamento massimo del corpo è l'**ampiezza** A. In corrispondenza dello spostamento massimo, dove il moto cambia verso, la velocità è zero. Poiché l'energia cinetica è zero in $x = \pm A$, agli estremi tutta l'energia è energia potenziale elastica. Pertanto, l'energia totale E agli estremi è:

$$E_{\text{totale}} = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \textbf{(10-13)}$$

Poiché l'energia si conserva, questa deve essere l'energia totale in ciascuna posizione durante il moto del corpo. La velocità massima v_{m} si ha in $x = 0$ dove tutta l'energia è cinetica. Pertanto, in $x = 0$, l'energia totale è uguale all'energia cinetica:

$$E_{\text{totale}} = \tfrac{1}{2}mv_{\text{m}}^2$$

Dall'Equazione (10-13):

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{m}}^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Risolvendo per v_{m} si ottiene:

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad \textbf{(10-14)}$$

La velocità massima è proporzionale all'ampiezza; a oscillazioni di ampiezza maggiore corrispondono velocità massime più elevate.

Mettiti alla prova 10.5

A quanto ammonta lo spostamento x di un oggetto che si muove di moto armonico semplice nell'istante in cui l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale?

Accelerazione nel moto armonico semplice

In ogni punto x la forza sul corpo è data dalla legge di Hooke; la seconda legge di Newton fornisce quindi l'accelerazione:

$$F_x = -kx = ma_x$$

Risolvendo per l'accelerazione:

Nel moto armonico semplice, l'accelerazione è funzione del tempo. Le equazioni ricavate per l'accelerazione costante non sono valide.

$$\boxed{a_x(t) = -\frac{k}{m}x(t) \qquad \textbf{(10-15)}}$$

Pertanto, l'accelerazione è il prodotto di una costante negativa $(-k/m)$ per lo spostamento; l'accelerazione e lo spostamento hanno sempre verso opposto. Ogniqualvolta l'accelerazione è il prodotto di una costante negativa per lo spostamento, il moto è armonico semplice.

L'accelerazione ha la sua massima intensità a_m, dove la forza è massima, e cioè in corrispondenza dello spostamento massimo $x = \pm A$:

$$a_m = \frac{k}{m}A \tag{10-16}$$

Esempio 10.6

Un modellino di razzo in oscillazione

Un modellino di razzo di massa 1.0 kg è attaccato a una molla orizzontale con costante elastica 6.0 N/cm. La molla viene compressa di 18.0 cm e quindi rilasciata. Lo scopo è di lanciare il razzo orizzontalmente, ma il dispositivo di sgancio non riesce a liberarsi, quindi il razzo comincia a oscillare orizzontalmente. Si trascuri l'attrito e si assuma che la molla sia ideale. (a) Qual è l'ampiezza di oscillazione? (b) Qual è la velocità massima? (c) Quali sono la velocità e l'accelerazione del razzo quando si trova a 12.0 cm dalla posizione di equilibrio?

Impostazione Rappresentiamo prima di tutto la situazione con un disegno (Figura 10.16). Inizialmente tutta l'energia è sottoforma di energia potenziale elastica e l'energia cinetica è zero. Lo spostamento iniziale deve corrispondere allo spostamento massimo – o ampiezza – di oscillazione poiché per raggiungere una posizione ancora più lontana dall'equilibrio occorrerebbe una energia potenziale elastica maggiore della energia totale disponibile. In ogni posizione la velocità può essere trovata usando la conservazione dell'energia $\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mvx^2=\frac{1}{2}kA^2\right)$. La massima velocità si ha quando tutta l'energia è cinetica. L'accelerazione può essere trovata tramite la seconda legge di Newton.

Soluzione (a) L'ampiezza di oscillazione è lo spostamento massimo, quindi $A = 18.0$ cm.

(b) In base alla conservazione dell'energia, l'energia cinetica massima è uguale alla energia potenziale elastica massima:

$$K_m = \tfrac{1}{2}mv_m^2 = E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Risolvendo per v_m:

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{6.0\times10^2\ \mathrm{N/m}}{1.0\ \mathrm{kg}}}\times0.180\ \mathrm{m} = 4.4\ \mathrm{m/s}$$

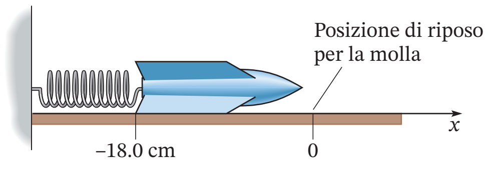


Figura 10.16
Il modellino di razzo prima di essere lanciato.

(c) Per la velocità dopo uno spostamento di 0.120 m, utilizziamo nuovamente la conservazione dell'energia.

$$\tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Risolvendo per v:

$$v = \sqrt{\frac{kA^2-kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2-x^2\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{6.0\times10^2\ \mathrm{N/m}}{1.0\ \mathrm{kg}}\left[(0.180\ \mathrm{m})^2-(0.120\ \mathrm{m})^2\right]} = 3.3\ \mathrm{m/s}$$

Dalla seconda legge di Newton:

$$F_x = -kx = ma_x$$

In $x = \pm0.120$ m:

$$a_x = -\frac{k}{m}x = \frac{6.0\times10^2\ \mathrm{N/m}}{1.0\ \mathrm{kg}}\times(\pm0.120\ \mathrm{m}) = \pm72\ \mathrm{m/s^2}$$

L'intensità dell'accelerazione è 72 m/s^2; la direzione è verso la posizione di equilibrio.

Discussione Si noti che in una data posizione (per es., $x = +0.120$ m), possiamo trovare *l'intensità della velocità* del razzo, ma la velocità può essere sia verso sinistra che verso destra; il razzo passa da ogni punto (tranne quelli estremi) sia durante il suo percorso verso sinistra che durante il suo percorso verso destra. Invece, in $x = +0.120$ m l'*accelerazione* è sempre nel verso $-x$, sia quando il razzo si muove verso sinistra che verso destra. Se il razzo è in moto verso destra, allora sta rallentando mentre si avvicina ad $x = +A$; se è in moto verso sinistra, allora sta accelerando mentre si avvicina ad $x = 0$.

Problema di verifica 10.6 La massima accelerazione del razzo

Qual è l'accelerazione massima del razzo dell'Esempio 10.6 e in quale posizione (o posizioni) si presenta?

10.6 PERIODO E FREQUENZA PER IL MOTO ARMONICO SEMPLICE

Periodo: tempo necessario per completare un ciclo.

Il moto armonico semplice è un moto *periodico* perché lo stesso movimento si ripete più volte – una particella va avanti e indietro lungo lo stesso percorso esattamente sempre nella stessa maniera. Ogni volta che la particella ripete il suo moto iniziale, diciamo che ha completato un altro ciclo. Per completare un ciclo del moto, la particella deve trovarsi nello stesso punto *e dirigersi nello stesso verso* come all'inizio del ciclo. Il periodo e la frequenza sono definiti esattamente come per il moto circolare uniforme, che è un altro tipo di moto periodico. Il **periodo** T è il tempo impiegato per compiere un ciclo completo. La **frequenza** f è il numero di cicli per unità di tempo:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{(unità di misura SI: Hz = cicli al secondo)} \tag{5-8}$$

Il moto armonico semplice è un tipo particolare di moto periodico in cui la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento dall'equilibrio. Non tutte le oscillazioni periodiche sono esempi di moto armonico semplice in quanto non tutte le forze di richiamo sono proporzionali allo spostamento. Una qualsiasi forza di richiamo può causare un moto oscillatorio. Un elettrocardiogramma (Figura 10.17) registra il comportamento periodico di un cuore che batte, ma il moto dell'ago del registratore non è armonico semplice. Così come stiamo per dimostrare, nel moto armonico semplice la posizione è una funzione sinusoidale del tempo.

Mettiti alla prova 10.6

Il pendolo in un orologio a pendolo oscilla tra la posizione estrema di sinistra a quella di destra in 1.0 s. Qual è la frequenza del suo moto periodico?

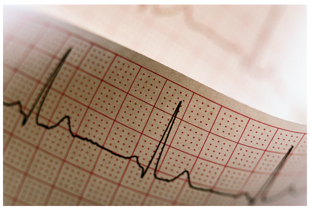


Figura 10.17 Tracciato di un elettrocardiogramma.

Moto circolare e moto armonico semplice

Per imparare qualcosa in più sul moto armonico semplice, immaginiamo di realizzare un esperimento (Figura 10.18). Attacchiamo un corpo a una molla ideale, spostiamo il corpo dalla posizione di equilibrio e quindi lo lasciamo libero. Il corpo oscilla con moto armonico semplice di ampiezza A. Nello stesso istante

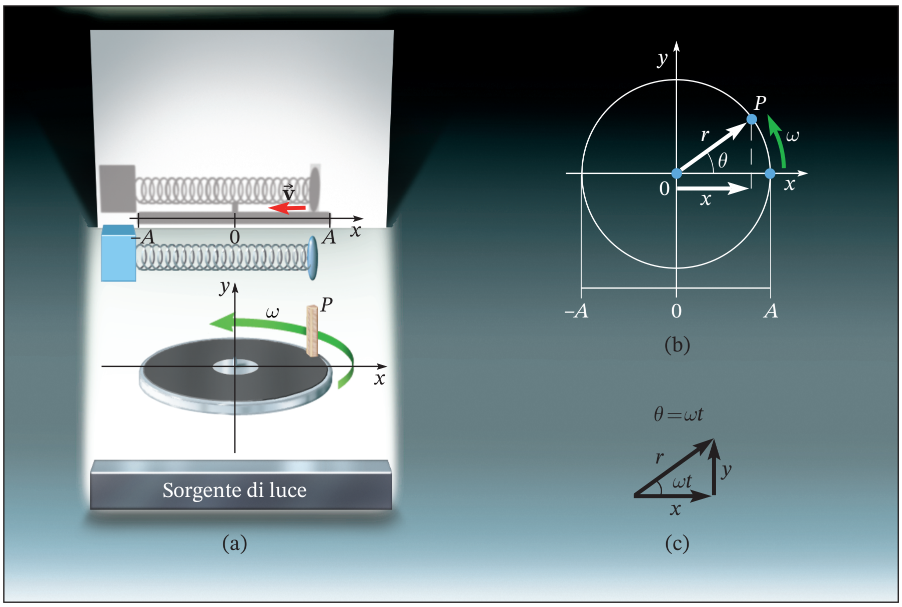


Figura 10.18 (a) Un esperimento per mostrare la relazione tra il moto circolare uniforme e il moto armonico semplice. (b) Un bastoncino P si muove in verso antiorario lungo una traiettoria circolare quando un disco ruota con velocità angolare costante ω. (c) Come ricavare la componente x dello spostamento.

un disco circolare, di raggio $r = A$ e con un bastoncino che sporge verticalmente dal bordo esterno, viene messo in rotazione con moto circolare uniforme. Sia il bastoncino che il corpo attaccato alla molla sono illuminati in modo tale che le ombre del corpo che oscilla e del bastoncino sul disco rotante siano visibili su uno schermo. La velocità del disco viene regolata fino a quando le ombre oscillano con lo stesso periodo. Dimostreremo che il moto delle due ombre è identico, quindi la descrizione matematica di uno può essere usata per l'altro.

Per trovare la descrizione matematica del moto armonico semplice, analizziamo il moto circolare uniforme del bastoncino. La Figura 10.18b mostra il bastoncino P che si muove in senso antiorario lungo una circonferenza di raggio A e con velocità angolare ω in rad/s. Per semplicità, poniamo che il bastoncino parta da $\theta = 0$ all'istante $t = 0$. La posizione del bastoncino in ogni istante è quindi data dall'angolo θ:

● La maggior parte delle equazioni che riguardano ω è corretta solo se ω viene misurata in radianti per unità di tempo (per es., in rad/s). Non dimenticare di utilizzare la calcolatrice nella modalità radianti.

$$\theta(t) = \omega t$$

Il moto dell'ombra del bastoncino ha la stessa componente x del bastoncino stesso. Utilizzando un triangolo rettangolo (Figura 10.14c), troviamo che:

$$x(t) = A \cos\theta = A \cos(\omega t) \qquad \textbf{(10-17)}$$

Poiché il bastoncino si muove di moto circolare uniforme, l'*intensità* della sua accelerazione è costante, ma non la direzione; l'accelerazione è diretta verso il centro della circonferenza. Nel Paragrafo 5.2 è stato dimostrato che l'intensità dell'accelerazione radiale, o centripeta, risulta:

$$a = \omega^2 r = \omega^2 A \qquad (5\text{-}12)$$

In ciascun istante il verso del vettore accelerazione è opposto al verso del vettore posizione in Figura 10.18b – cioè, è verso il centro della circonferenza. Pertanto:

$$a_x = -a \cos\theta = -\omega^2 A \cos(\omega t) \qquad \textbf{(10-18)}$$

Confrontando le Equazioni (10-17) e (10-18), vediamo che, in ciascun istante:

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \qquad \textbf{(10-19)}$$

Nell'Equazione (10-15) abbiamo dimostrato che nel moto armonico semplice l'accelerazione è proporzionale allo spostamento:

$$a_x = -\frac{k}{m} x \qquad (10\text{-}15)$$

Confrontando i membri di destra delle Equazioni (10-15) e (10-19), i moti delle due ombre sono identici a condizione che:

Frequenza angolare di un sistema massa-molla

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(10-20a)}$$

Nel moto armonico semplice la posizione e l'accelerazione di un corpo sono funzioni sinusoidali del tempo [Equazioni (10-17) e (10-18)]. Le funzioni sinusoidali sono seno e coseno. Nel Problema 54, potete dimostrare che anche v_x è una funzione sinusoidale del tempo.

Il termine *armonico* nel *moto armonico semplice* si riferisce a un'oscillazione sinusoidale; questa utilizzazione è collegata a un simile impiego in musica e acustica. Le funzioni sinusoidali sono chiamate anche funzioni armoniche. Un'oscillazione complessa può essere ottenuta combinando oscillazioni armoniche con diversa frequenza, motivo per il quale lo studio del moto armonico semplice è basilare per la comprensione di oscillazioni più complesse. Il termine *semplice* nel moto armonico semplice indica che l'ampiezza di oscillazione è costante; assumiamo che non vi sia dissipazione di energia che fa estinguere l'oscillazione.

Periodo e frequenza per un sistema massa-molla ideale

Poiché il corpo nel moto armonico semplice e il bastoncino in moto circolare hanno la stessa frequenza e lo stesso periodo, le relazioni tra ω, f, e T continuano a essere valide. Pertanto, la frequenza e il periodo di un sistema massa-molla sono:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(10-20b)}$$

e

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(10-20c)}$$

Nel contesto del moto armonico semplice, la grandezza ω è denominata **frequenza angolare**. Si noti che la frequenza angolare è determinata dalla massa e dalla costante elastica della molla, ma è indipendente dall'ampiezza.

Avendo identificato ω per un sistema massa-molla, possiamo ottenere la massima velocità e accelerazione dalle Equazioni (10-14) e (10-16):

$$v_{\mathrm{m}} = \omega A \qquad \textbf{(10-21)}$$

$$a_{\mathrm{m}} = \omega^2 A \qquad \textbf{(10-22)}$$

Queste espressioni sono più generali rispetto alle Equazioni (10-14) e (10-16) – esse sono valide per qualsiasi sistema in moto armonico semplice, non solamente per un sistema massa-molla.

Come trovare la frequenza angolare per un corpo qualsiasi in moto armonico semplice

- Scrivere la forza di richiamo in funzione dello spostamento dall'equilibrio. Poiché è lineare, la forza di richiamo assume sempre la forma $F = -kx$, dove k è una costante.
- Utilizzare la seconda legge di Newton per mettere in relazione la forza di richiamo con l'accelerazione.
- Risolvere per ω utilizzando $a_x = -\omega^2 x$ [Equazione (10-19)].

Massa e molla verticale

I sistemi costituiti da una massa e una molla discussi finora oscillano orizzontalmente. Anche una massa che oscilla attaccata a una molla verticale segue un moto armonico semplice; la differenza è che il punto di equilibrio è spostato verso il basso dalla forza di gravità. Per le nostre considerazioni, ipotizziamo molle ideali che rispettano la legge di Hooke e con massa trascurabilmente piccola.

Supponiamo che un corpo di peso mg sia appeso a una molla ideale di costante elastica k (Figura 10.19). La posizione di equilibrio del corpo *non* è quella della molla a riposo. In condizione di equilibrio, la molla è allungata verso il

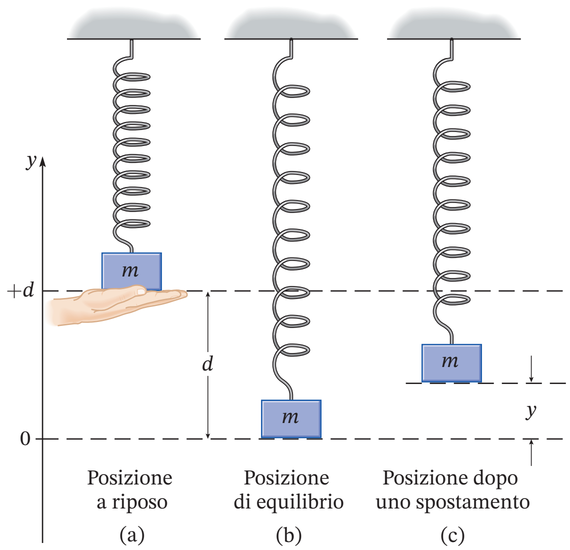


Figura 10.19 (a) Una molla, di costante elastica k, a riposo con attaccata una massa m. (b) La stessa molla allungata nella sua posizione di equilibrio, a distanza d al disotto della posizione a riposo, dopo che la massa m è stata lasciata libera di pendere. (c) La molla viene spostata rispetto alla posizione di equilibrio.

basso di una quantità d rispetto alla sua lunghezza a riposo in modo tale che la molla tiri verso l'alto con una forza pari a mg. Assumendo che il semiasse $+y$ sia orientato verso l'alto, la condizione di equilibrio è:

$$\sum F_y = +kd - mg = 0 \quad \text{(all'equilibrio)} \tag{10-23}$$

Scegliamo l'origine ($y = 0$) nel punto di equilibrio. Se il corpo viene spostato verticalmente dal punto di equilibrio a una posizione y, la forza della molla diventa:

$$F_{\text{molla}, y} = k(d - y)$$

Se y è positivo, il corpo è spostato verso l'alto e la forza della molla è minore di kd. La componente y della forza risultante è allora:

$$\sum F_y = k(d - y) - mg = kd - ky - mg$$
$$\text{(per uno spostamento } y \text{ dall'equilibrio)}$$

Dall'Equazione (10-23), sappiamo che $kd = mg$; pertanto:

$$\sum F_y = -ky$$

La forza di richiamo fornita complessivamente dalla molla e dalla forza di gravità è pari a $-k$ volte lo spostamento dall'equilibrio. Pertanto, il sistema massa-molla verticale segue un moto armonico semplice con lo stesso periodo e la stessa frequenza che avrebbe se fosse orizzontale.

Esempio 10.7

Una molla verticale

Una molla con costante elastica k è appesa verticalmente. Un modellino di oca giocattolo di massa m è attaccato alla molla non deformata e viene quindi lasciato libero di oscillare verticalmente. (Trascurare l'attrito e la resistenza dell'aria; considerare la molla ideale e priva di massa.) Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale elastica, l'energia potenziale gravitazionale e l'energia meccanica totale (a) nel punto in cui il modellino viene lasciato libero e (b) nella posizione di equilibrio. Assegnare all'energia potenziale gravitazionale il valore zero nella posizione di equilibrio.

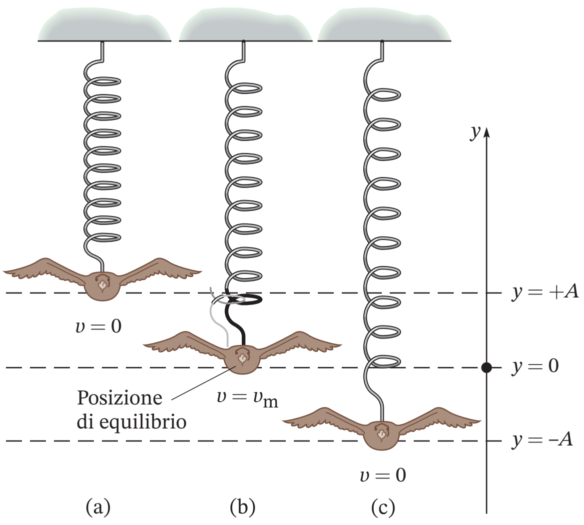


Figura 10.20
(a) Prima che il modellino di uccello venga rilasciato dalla posizione $y = +A$ la molla non è deformata; (b) il modellino passa dalla posizione di equilibrio $y = 0$ con velocità massima; (c) il massimo allungamento della molla si verifica quando il modellino è in $y = -A$.

Impostazione Il modellino oscilla con moto armonico semplice rispetto alla sua posizione di equilibrio $y = 0$ tra le due posizioni estreme $y = +A$ e $y = -A$ (vedi Figura 10.20). L'ampiezza A è uguale alla deformazione della molla nella posizione di equilibrio; può essere trovata ponendo uguale a zero la forza risultante sul modellino. L'energia meccanica totale è la somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale elastica e dell'energia potenziale gravitazionale. L'energia totale è la stessa nelle due posizioni; poiché non agisce alcuna forza dissipativa, l'energia meccanica si conserva.

Soluzione La posizione di equilibrio è nel punto in cui la forza risultante sul modellino è zero:

$$\sum F_y = +kd - mg = 0 \qquad (10\text{-}23)$$

In questa equazione, d è l'allungamento della molla all'equilibrio. Poiché il modellino è lasciato libero quando la molla è a riposo, d è anche l'ampiezza di oscillazione:

$$A = d = \frac{mg}{k}$$

(a) Nel punto di rilascio, $v = 0$ e l'energia cinetica è zero. Anche l'energia potenziale elastica è zero – la molla non è deformata. L'energia potenziale gravitazionale è:

$$U_g = mgy = mgA = \frac{(mg)^2}{k}$$

L'energia meccanica totale è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (elastica + gravitazionale):

$$E = K + U_e + U_g = \frac{(mg)^2}{k}$$

(b) Nella posizione di equilibrio, il modellino si muove con la velocità massima $v_m = \omega A$. La frequenza angolare è uguale a quella di una molla orizzontale: $\omega = \sqrt{k/m}$. Quindi l'energia cinetica è:

$$K = \tfrac{1}{2} m v_m^2 = \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Sostituendo $A = mg/k$ e $\omega^2 = k/m$:

$$K = \tfrac{1}{2} m \frac{k}{m} \frac{(mg)^2}{k^2} = \tfrac{1}{2} \frac{(mg)^2}{k}$$

La deformazione della molla allungata è A, quindi l'energia potenziale elastica è:

$$U_e = \tfrac{1}{2} k A^2 = \tfrac{1}{2} k \frac{(mg)^2}{k^2} = \tfrac{1}{2} \frac{(mg)^2}{k}$$

L'energia potenziale gravitazionale è zero in $y = 0$. Pertanto, l'energia meccanica totale è:

$$E = K + U_e + U_g = \tfrac{1}{2} \frac{(mg^2)}{k} + \tfrac{1}{2} \frac{(mg)^2}{k} + 0 = \frac{(mg)^2}{k}$$

che è uguale a quella in $y = +A$.

Discussione Quando il modellino si sposta in basso dal punto di rilascio verso la posizione di equilibrio, l'energia potenziale gravitazionale viene convertita in energia potenziale elastica e in energia cinetica. Dopo che il modellino passa per la posizione di equilibrio, sia l'energia cinetica che quella potenziale gravitazionale vengono convertite in energia potenziale elastica. Nel punto più basso del moto, l'energia potenziale gravitazionale assume il suo valore minimo, mentre l'energia potenziale elastica assume il suo valore massimo. L'energia potenziale *totale* (gravitazionale più elastica) assume il valore minimo nella posizione di equilibrio poiché l'energia cinetica è massima in tale posizione.

Problema di verifica 10.7 L'energia in corrispondenza dell'estensione massima

Calcolare i valori delle energie nella posizione più bassa dell'oscillazione dell'Esempio 10.7.

10.7 ANALISI GRAFICA DEL MOTO ARMONICO SEMPLICE

Abbiamo dimostrato che la posizione di una particella che oscilla lungo l'asse x è:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad (10\text{-}17)$$

Poiché la funzione coseno varia tra -1 e $+1$, moltiplicandola per A si ottiene uno spostamento da $-A$ fino a $+A$. La Figura 10.21a è un grafico della posizione in funzione del tempo.

In ogni istante la velocità è la pendenza del grafico $x(t)$. Si noti in Figura 10.21a che la massima pendenza si ha in $x = 0$, a conferma di quanto già sapevamo dalla conservazione dell'energia: la velocità è massima nel punto di equilibrio. Si noti anche che la velocità è zero quando lo spostamento è massimo ($+A$ o $-A$). La Figura 10.21b mostra un grafico di $v_x(t)$. L'equazione che descrive questo grafico è (vedi Problema 54):

$$v_x(t) = -v_m \sin(\omega t) = -\omega A \sin(\omega t) \qquad (10\text{-}24)$$

L'accelerazione rappresenta la pendenza del grafico $v_x(t)$. La Figura 10.21c mostra un grafico di $a_x(t)$, descritta dall'equazione:

$$a_x(t) = -a_m \cos(\omega t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) \qquad (10\text{-}18)$$

Abbiamo scritto la posizione in funzione del tempo utilizzando la funzione coseno, ma possiamo altrettanto correttamente utilizzare la funzione seno. La differenza tra le due è nella posizione iniziale all'istante $t = 0$. Se per $t = 0$ la posizione è in un massimo ($x = A$), $x(t)$ è una funzione coseno. Se per $t = 0$ la posizione è nel punto di equilibrio ($x = 0$), $x(t)$ è una funzione seno. Analizzando le pendenze dei grafici, potete dimostrare (Problema 50) che se la posizione in funzione del tempo è:

$$x(t) = A\sin(\omega t) \qquad (10\text{-}25a)$$

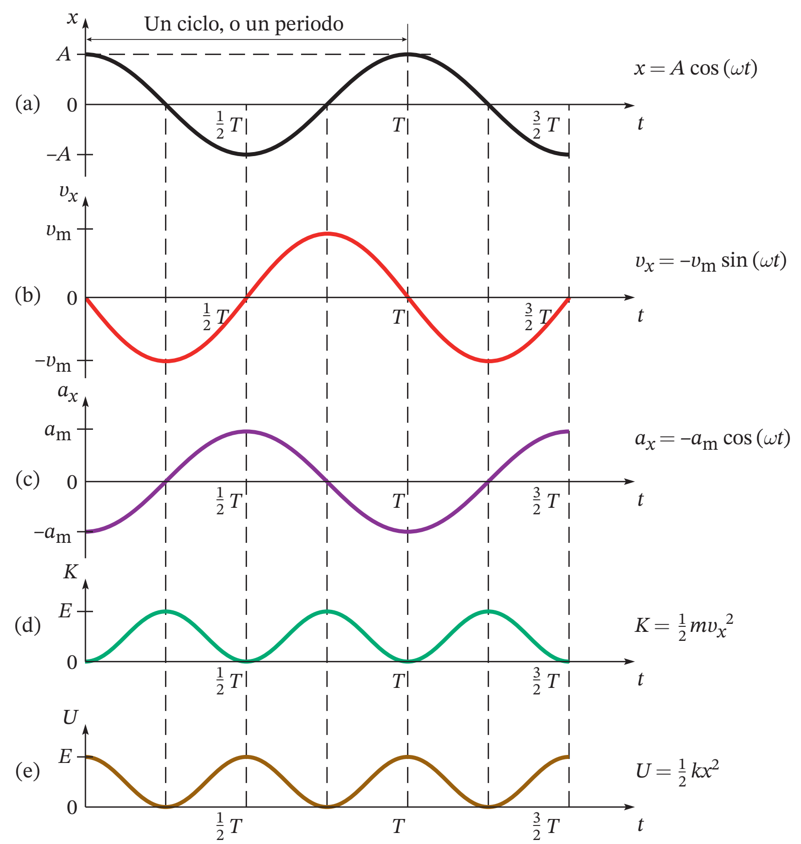


Figura 10.21 Grafici di (a) posizione, (b) velocità e (c) accelerazione in funzione del tempo per una particella in moto armonico semplice. Si osservino le relazioni incrociate tra i tre grafici. Il grafico della velocità è in anticipo di un quarto di ciclo rispetto al grafico della posizione; cioè, $v_x(t)$ raggiunge il suo valore massimo positivo un quarto di periodo prima che $x(t)$ raggiunga il suo massimo positivo. Analogamente, l'accelerazione è in anticipo di un quarto di ciclo rispetto alla velocità e di metà ciclo rispetto alla posizione. (d, e) Energia cinetica e denergia potenziale in funzione del tempo. L'energia totale $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$ è costante.

allora la velocità è:

$$v_x(t) = v_m \cos(\omega t) \qquad \text{(10-25b)}$$

e l'accelerazione è:

$$a_x(t) = -a_m \sin(\omega t) \qquad \text{(10-25c)}$$

Mettiti alla prova 10.7

(a) Quando la posizione di un corpo che si muove di moto armonico semplice è zero, qual è la sua velocità? (b) Quando la sua velocità è zero, qual è la sua posizione?

Esempio 10.8

Il cono di un altoparlante in oscillazione

Un altoparlante ha un diaframma mobile (il *cono*) che vibra per produrre onde sonore. Lo spostamento del cono di un altoparlante che riproduce un tono sinusoidale di prova è riportato in grafico nella Figura 10.22. Trovare (a) l'ampiezza del moto, (b) il periodo del moto, e (c) la frequenza del moto. (d) Scrivere le funzioni $x(t)$ e $v_x(t)$.

Impostazione L'ampiezza e il periodo possono essere ricavati direttamente dal grafico. La frequenza è l'inverso del periodo. Poiché ha inizio con lo spostamento massimo, $x(t)$ è descritta da una funzione coseno. Osservando la pendenza di $x(t)$, possiamo stabilire se la velocità è una funzione seno positiva o negativa.

Soluzione (a) L'ampiezza è lo spostamento massimo mostrato nel grafico: $A = 0.015$ m.

(b) Il periodo è il tempo necessario per un ciclo completo. Dal grafico: $T = 0.040$ s.

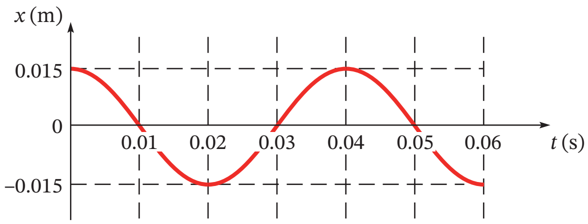


Figura 10.22
Spostamento orizzontale in funzione del tempo per un cono in oscillazione.

(c) La frequenza è l'inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.040 \text{ s}} = 25 \text{ Hz}$$

(d) Poiché $x = +A$ per $t = 0$, scriviamo $x(t)$ come una funzione coseno:

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

dove $A = 0.015$ m e:

$$\omega = 2\pi f = 160 \text{ rad/s}$$

La pendenza di $x(t)$ è inizialmente zero e successivamente diventa negativa. Pertanto, $v_x(t)$ è una funzione seno negativa:

$$v_x(t) = -v_m \sin(\omega t)$$

dove $\omega = 2\pi f = 160$ rad/s e:

$$v_m = \omega A = 160 \text{ rad/s} \times 0.015 \text{ m} = 2.4 \text{ m/s}$$

Discussione Come verifica, la velocità dovrebbe anticipare la posizione di $\frac{1}{4}$ di ciclo. Se immaginiamo di spostare verso destra (in avanti) l'asse delle ordinate di 0.01 s, il grafico dovrebbe avere la pendenza di una funzione seno negativa.

Problema di verifica 10.8 L'accelerazione del cono dell'altoparlante

Disegnare un grafico e scrivere una funzione per $a_x(t)$.

10.8 IL PENDOLO

Pendolo semplice

Quando un pendolo oscilla, un filo o una bacchetta sottile vincola il peso del pendolo a muoversi lungo un arco di circonferenza. Tuttavia, *per oscillazioni di piccola ampiezza*, assumiamo che il peso del pendolo si muova *avanti e indietro lungo l'asse x*; il moto verticale del peso è trascurabile.

Poiché la forza peso non ha componente x, la forza di richiamo è la componente x della forza dovuta al filo. Ci aspettiamo che per piccole oscillazioni la forza di richiamo sia proporzionale allo spostamento. Dalla Figura 10.23:

$$\sum F_x = -T\sin\theta = -\frac{Tx}{L}$$

dove L è la lunghezza del filo e $\sin\theta = x/L$. La componente y dell'accelerazione è trascurabilmente piccola, quindi:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = ma_y \approx 0$$

Dal momento che $\cos\theta \approx 1$ per piccoli valori di θ, $T \approx mg$. Dunque:

$$\sum F_x \approx -\frac{mgx}{L} = ma_x$$

Risolvendo per a_x:

$$a_x = -\frac{g}{L}x$$

Per determinare la frequenza angolare, ricordiamo che $a_x = -\omega^2 x$ [Equazione (10-19)]. Pertanto, la frequenza angolare è:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \textbf{(10-26a)}$$

e il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{(10-26b)}$$

Si noti che il periodo dipende da L e da g, ma non dalla massa del peso del pendolo.

Bisogna fare attenzione a non confondere la *frequenza angolare* del pendolo con la sua *velocità angolare*. Anche se hanno la stessa unità di misura (rad/s nel Sistema internazionale) e sono rappresentate con lo stesso simbolo (ω), queste due grandezze *non* sono le stesse per un pendolo. Quando ci occupiamo del pendolo, utilizziamo il simbolo ω solamente per la *frequenza angolare*. La frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ di un determinato pendolo è costante, mentre la velocità angolare (la rapidità di variazione di θ) varia in funzione del tempo tra zero (agli estremi) e il suo valore massimo (nel punto di equilibrio).

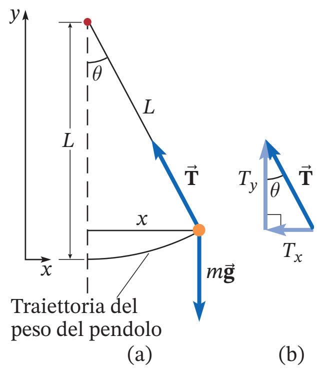


Figura 10.23 (a) Le forze sul peso di un pendolo. (b) Come ricavare la componente x della forza dovuta al filo.

LA FISICA NEL QUOTIDIANO

La relazione esistente tra il periodo e la lunghezza del pendolo può essere verificata facilmente a casa. Costruisci un pendolo semplice legando un filo sottile a un'estremità di un fermaglio e infilate una moneta nel fermaglio. Se tende a scivolare via, si può usare del nastro adesivo per fissare la moneta. Tenendo l'estremità del filo, fai oscillare la moneta lungo un piccolo arco e prendi nota del tempo che impiega la moneta per compiere dieci oscillazioni complete, partendo da un estremo fino a ritornare dieci volte nella stessa posizione. Per ottenere il periodo, dividi questo tempo per dieci. (Questa procedura fornisce un valore più accurato rispetto a cronometrare un singolo periodo.) Misura la lunghezza del pendolo e fai una verifica dell'Equazione (10-26b).

Ripeti l'esperimento tenendo il filo in un punto più vicino alla moneta, accorciando in tal modo la lunghezza del pendolo. Cosa trovi? Il periodo del pendolo più corto è maggiore, minore o uguale a quello misurato per il pendolo più lungo?

È possibile anche verificare l'effetto che una massa diversa ha sul periodo, utilizzando due o tre monete legate assieme con nastro adesivo, con un pendolo della stessa lunghezza di quello utilizzato per il primo esperimento. Il risultato è influenzato da una moneta più pesante?

Esempio 10.9

L'orologio a pendolo

Un orologio a pendolo utilizza un pendolo con un periodo di 2.0 s per scandire il tempo. In questo tipo di orologio, la massa del peso del pendolo è di 150 g; il pendolo viene messo in oscillazione spostandolo di 33 mm da un lato. (a) Qual è la lunghezza del pendolo? (b) Lo spostamento iniziale soddisfa l'approssimazione di angolo piccolo?

Impostazione Il periodo dipende dalla lunghezza del pendolo e dalla intensità del campo gravitazionale g. Non dipende dalla massa del peso del pendolo. Non dipende neanche dallo spostamento iniziale, a condizione che sia piccolo rispetto alla lunghezza.

Soluzione (a) Nell'ipotesi di piccole ampiezze, il periodo è:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Risolvendo per L:

$$L = \frac{T^2 g}{(2\pi)^2}$$

$$= \frac{(2.0\ \text{s})^2 \times 9.80\ \text{m/s}^2}{(2\pi)^2} = 0.99\ \text{m}$$

(b) L'approssimazione di angolo piccolo è valida se lo spostamento massimo è piccolo rispetto alla lunghezza del pendolo.

$$\frac{x}{L} = \frac{33\ \text{mm}}{990\ \text{mm}} = 0.033$$

Questo valore è abbastanza piccolo? Se $\sin\theta = x/L = 0.033$, allora

$$\theta = \sin^{-1} 0.033 = 0.033006$$

$\sin\theta$ e θ differiscono per meno dello 0.02%. Poiché conosciamo T con due sole cifre significative, l'approssimazione è buona.

Discussione Dobbiamo controllare di non avere scritto "alla rovescia" l'espressione per il periodo, che è l'errore più probabile che potremmo fare. Dopo avere verificato che le unità di misura sono a posto, sappiamo anche che un pendolo più lungo ha un periodo più lungo, quindi L deve stare al numeratore. D'altra parte, se g fosse maggiore, la forza di richiamo sarebbe maggiore e ci aspettiamo che il periodo diminuisca; pertanto, g fa parte del denominatore.

Problema di verifica 10.9 Il pendolo sulla Luna

Un pendolo di lunghezza 0.99 m viene portato sulla Luna da un astronauta. Il periodo del pendolo è 4.9 s. Qual è l'intensità del campo gravitazionale sulla superficie della Luna?

Pendolo fisico

Immaginate di avere un pendolo semplice di lunghezza L. Vicino avete un'asta uniforme in metallo della stessa lunghezza, che è libera di oscillare intorno a un asse passante per una estremità. Se vengono messi in oscillazione, i due sistemi avrebbero lo stesso periodo?

Per il pendolo semplice, si assume che il peso del pendolo sia una massa puntiforme; tutta la massa del pendolo si trova a distanza L dall'asse di rotazione. Per l'asta in metallo, tuttavia, la massa è distribuita uniformemente dall'asse di rotazione fino a una distanza *massima* L rispetto all'asse. Il centro di massa si trova nel punto medio, a distanza $d = \frac{1}{2}L$ dall'asse (Figura 10.24). Poiché la massa è mediamente più vicina all'asse, il periodo è più breve di quello del pendolo semplice.

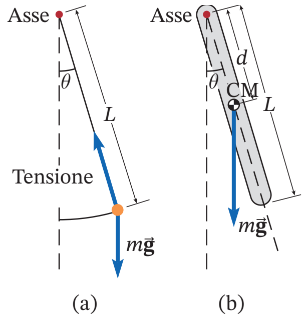


Figura 10.24 (a) Un pendolo semplice e (b) un pendolo fisico.

Il periodo di questa asta sarebbe uguale a quello di un pendolo semplice di lunghezza $\frac{1}{2}L$? Questa è una buona ipotesi, poiché il centro di massa dell'asta si trova a una distanza $\frac{1}{2}L$ dall'asse di rotazione. Sfortunatamente, non è così semplice. La forza di gravità è applicata al centro di massa, ma *non possiamo* considerare la massa concentrata tutta in quel punto – ciò porterebbe a un momento di inerzia sbagliato. Quando viene messa in oscillazione, l'asta, o qualsiasi altro corpo rigido libero di ruotare intorno a un asse fisso, è chiamata **pendolo fisico**.

Per trovare il periodo di un pendolo fisico, troviamo prima il momento meccanico risultante che agisce sul pendolo fisico e quindi utilizziamo la forma rotazionale della seconda legge di Newton. Se calcoliamo i momenti rispetto all'asse di rotazione, solo la forza di gravità ha un momento diverso da zero. Se la massa del pendolo è m e la distanza dall'asse al centro di massa è d, allora il momento è:

$$\tau = F_{\perp}r = -(mg\sin\theta)d$$

dove θ è l'angolo indicato in Figura 10.20. L'altra componente della forza di gravità, $mg\cos\theta$, passa per l'asse di rotazione, quindi non contribuisce al momento meccanico. Nell'equazione sopra riportata, sia τ sia θ sono positivi se sono in senso antiorario; il segno negativo indica che essi hanno sempre verso opposto, in quanto il momento meccanico tende a portare θ verso il valore zero. Nell'ipotesi di piccole ampiezze, $\sin\theta \approx \theta$ (in radianti) e il momento meccanico è:

$$\tau = -mgd\theta$$

Pertanto, il momento meccanico di richiamo è proporzionale allo spostamento angolare θ, così come la forza di richiamo era proporzionale allo spostamento nel caso del pendolo semplice e della massa attaccata a una molla.

Il momento meccanico risultante è uguale al prodotto tra il momento di inerzia e l'accelerazione angolare:

$$\tau = -mgd\theta = I\alpha$$

e l'accelerazione angolare è:

$$\alpha = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad \text{(10-27)}$$

Poiché l'accelerazione angolare è il prodotto tra una costante negativa e lo spostamento angolare dall'equilibrio, si ha effettivamente un moto armonico semplice. L'Equazione (10-27) è analoga all'equazione per l'accelerazione lineare di una molla oscillante:

$$a_x = -\omega^2 x \qquad \text{(10-19)}$$

dove:

$$\frac{mgd}{I} = \omega^2$$

Pertanto, la frequenza angolare del pendolo fisico è:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{10-28a}$$

e il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{10-28b}$$

dove d è la distanza dall'asse al centro di massa e I è il momento di inerzia.

Il centro di massa di un'asta uniforme di lunghezza L si trova nel punto medio dell'asta:

$$d = \tfrac{1}{2}L$$

Dalla Tabella 8.1, il momento di inerzia di un'asta uniforme rispetto a un asse che passa per una delle sue estremità è $I = \frac{1}{3}mL^2$. Il periodo di oscillazione è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Sostituendo le espressioni per I e per d:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{(mg)\frac{1}{2}L}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Il periodo dell'asta è uguale a quello di un pendolo semplice di lunghezza $\frac{2}{3}L$.

Mettiti alla prova 10.8

Il pendolo semplice può essere pensato come un caso limite del pendolo fisico in cui tutta la massa è alla stessa distanza L dall'asse di rotazione. L'Equazione 10.28b è corretta per descrivere questo caso limite?

Esempio 10.10

Confronto tra le frequenze e le velocità di passeggio di vari animali

Durante una tranquilla passeggiata, la zampa, o la gamba, può essere trattata come un pendolo fisico di lunghezza L imperniato sull'anca. (a) Qual è la frequenza di passeggio tranquillo per un gatto (L = 30 cm), un cane (60 cm), un essere umano (1 m), una giraffa (2 m), e un mitologico Titano (10 m)? (b) Ricavare un'equazione che fornisca la velocità di passeggio (percorso effettuato per unità di tempo) per una data frequenza di passeggio f. [*Aiuto*: cominciare facendo un disegno della posizione della gamba all'inizio dell'oscillazione (gamba indietro) e alla fine dell'oscillazione (gamba avanti) e assumere un angolo di circa 30° tra queste due posizioni. A quanti passi corrisponde un periodo completo del pendolo?] (c) Trovare la velocità di passeggio per ognuno degli animali elencati nella parte (a).

Impostazione Dobbiamo utilizzare un modello idealizzato della gamba, o della zampa, poiché non conosciamo l'esatta localizzazione del centro di massa o il momento di inerzia. Il pendolo semplice non è un buon modello, perché bisognerebbe assumere che tutta la massa della gamba sia nel piede! Un modello molto migliore consiste nel considerare la gamba come un cilindro uniforme imperniato a un'estremità.

Soluzione (a) Per un cilindro uniforme, il centro di massa si trova a distanza $d = \frac{1}{2}L$ dal perno e il momento di inerzia riferito a un asse passante per un'estremità è $I = \frac{1}{3}mL^2$. Il periodo è allora:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{(mg)\frac{1}{2}L}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

e la frequenza è:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} \approx 0.2\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Sostituendo i valori numerici di L per ciascun animale, troviamo che le frequenze sono 1 Hz (gatto), 0.8 Hz (cane), 0.6 Hz (essere umano), 0.4 Hz (giraffa) e 0.2 Hz (Titano).

(b) Un periodo del "pendolo" corrisponde a due passi. In Figura 10.25a, la gamba destra sta per andare avanti. Si compie un passo quando il pendolo dondola in avanti per mezzo ciclo. In Figura 10.25b, il piede destro sta per toccare il terreno; in Figura 10.25c, il piede destro tocca il terreno e adesso è il piede sinistro che sta per compiere un passo in avanti. Durante questo passo, il piede destro rimane fermo sul terreno, ma la gamba destra dondola indietro rispetto alla giuntura dell'anca. Durante ogni passo, la distanza coperta è circa la lunghezza di un arco di 30° di raggio L, pari a $\frac{1}{12}$ della circonferenza di un cerchio di raggio L. Quindi, durante un periodo, la distanza percorsa passeggiando è:

$$D = 2 \times \frac{1}{12} \times 2\pi L = \frac{\pi}{3} L \approx L$$

e la velocità di passeggio è:

$$v = \frac{D}{T} = Lf = 0.2\sqrt{gL}$$

(c) Le velocità sono 0.3 m/s (gatto), 0.5 m/s (cane), 0.6 m/s (essere umano), 0.9 m/s (giraffa), e 2 m/s (Titano).

Discussione La soluzione indica che gambe più lunghe camminano più velocemente, ma la frequenza dei passi è minore. Potete verificare ciò camminando vicino a un amico che è molto più alto o molto più basso di voi, o portando il vostro cane a passeggio.

Problema di verifica 10.10 Velocità di passeggio per un essere umano

In un modello più realistico di una gamba umana di lunghezza 1.0 m, il centro di massa è a 0.45 m dall'anca e il momento di inerzia è $\frac{1}{6}mL^2$. Qual è la velocità di passeggio prevista da questo modello?

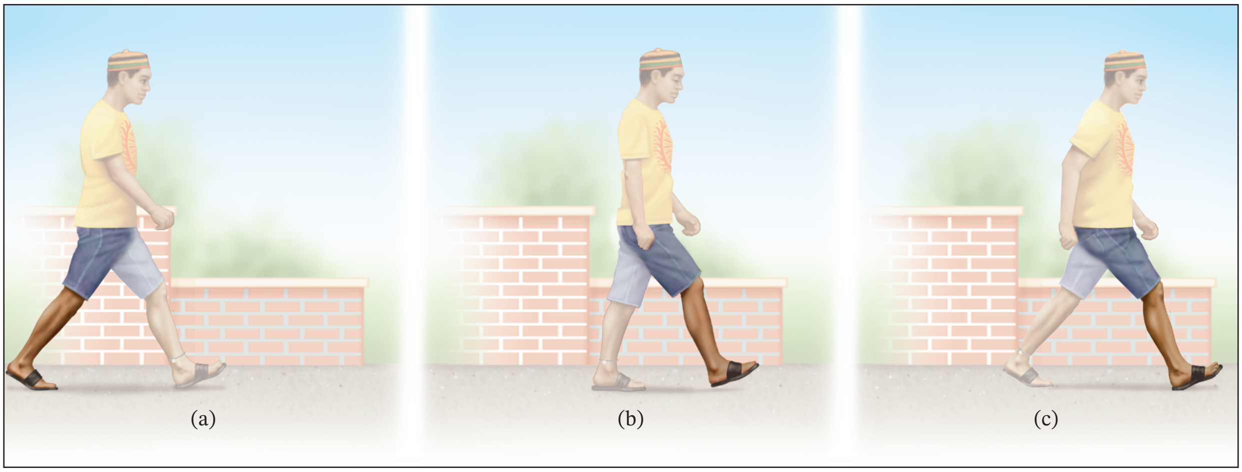


Figura 10.25
Il moto in avanti di una gamba durante una passeggiata è simile all'oscillazione di un pendolo fisico. Da (a) a (b), la gamba destra oscilla in avanti come un pendolo. In (c), il piede destro poggia a terra e la gamba sinistra sta per oscillare in avanti.

10.9 OSCILLAZIONI SMORZATE

Nel moto armonico semplice, assumiamo che non agiscano forze dissipative come la forza di attrito o la forza viscosa. Poiché l'energia meccanica è costante, le oscillazioni continuano per sempre con ampiezza costante. Il moto armonico

Ammortizzatori di un'automobile

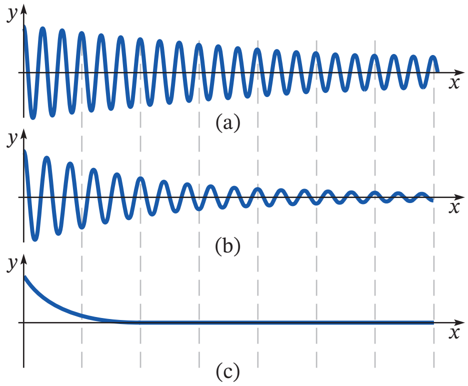


Figura 10.26 Grafici di $x(t)$ per un sistema massa-molla con entità di smorzamento crescente. In (c) lo smorzamento è sufficiente a impedire il manifestarsi di oscillazioni.

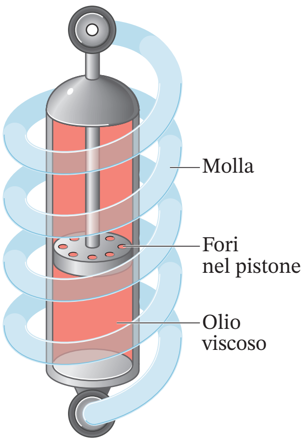


Figura 10.27 Un ammortizzatore.

semplice è un modello semplificato. Le oscillazioni di un pendolo o di un diapason svaniscono gradualmente in quanto l'energia viene dissipata. In ciascun ciclo l'ampiezza è un poco più piccola di quella del ciclo precedente (vedi Figura 10.26a). Questo tipo di moto è denominato **oscillazione smorzata**, dove la parola *smorzata* viene usata nel senso di *frenata* o *limitata*. Per uno smorzamento di piccola entità, le oscillazioni avvengono approssimativamente alla stessa frequenza di quando non c'è smorzamento. Un maggiore grado di smorzamento fa diminuire leggermente la frequenza (Figura 10.26b). Uno smorzamento ancora più intenso impedisce del tutto il manifestarsi di oscillazioni (Figura 10.26c).

Non sempre lo smorzamento è svantaggioso. Il sistema di sospensioni di un'automobile comprende degli ammortizzatori che fanno smorzare rapidamente la vibrazione del corpo – una massa collegata al telaio tramite molle. Gli ammortizzatori riducono la scomodità cui sarebbero invece sottoposti i passeggeri a causa degli scossoni di un'automobile in moto su una strada accidentata. La Figura 10.27 mostra il funzionamento di un ammortizzatore. Un olio viscoso deve scorrere attraverso i fori nel pistone, per permettere all'ammortizzatore di comprimersi o di espandersi. La forza viscosa dissipa energia indipendentemente dal verso in cui si muove il pistone. L'ammortizzatore consente alla molla di riportarsi facilmente alla sua lunghezza di equilibrio senza oscillare verticalmente (Figura 10.26c). Se l'olio fuoriesce dall'ammortizzatore, lo smorzamento non è sufficiente per evitare oscillazioni. Dopo avere preso una cunetta, l'automobile oscilla verticalmente (Figura 10.26b).

10.10 OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

Quando sono presenti forze di smorzamento, l'unico modo per evitare che l'ampiezza di oscillazione diminuisca è di reintegrare l'energia dissipata tramite un'altra fonte di energia. Quando un bambino su un'altalena viene spinto, il genitore reintegra l'energia dissipata con una piccola spinta. Per mantenere costante l'ampiezza del moto, il genitore applica una piccola spinta in ogni ciclo, aggiungendo così ogni volta l'energia appena sufficiente per compensare l'energia dissipata in un ciclo. La frequenza della *forza esterna* (la spinta del genitore) coincide con la *frequenza naturale* del sistema (la frequenza alla quale oscillerebbe spontaneamente).

Si hanno **oscillazioni forzate** (o oscillazioni guidate) quando una forza esterna periodica agisce su un sistema che può oscillare. La frequenza della forza esterna non deve coincidere con la frequenza naturale del sistema. Alla fine, il sistema oscilla con la frequenza della forza esterna, anche se questa è lontana dalla frequenza naturale. Tuttavia, l'ampiezza delle oscillazioni è in generale piuttosto piccola tranne quando la frequenza f della forza esterna è prossima alla frequenza naturale f_0 (vedi Figura 10.28). Quando la frequenza della forza esterna è uguale alla frequenza naturale del sistema, l'ampiezza del moto è massima. Questa condizione è chiamata **risonanza**.

Alla risonanza, la forza esterna è sempre nello stesso verso della velocità del corpo. Poiché la forza esterna compie sempre lavoro positivo, l'energia dell'oscillatore cresce fino a quando l'energia dissipata bilancia l'energia introdotta dalla forza esterna. Per un oscillatore con poco smorzamento, ciò richiede un'ampiezza elevata. Quando la frequenza della forza esterna e quella naturale sono differenti, la forza esterna e la velocità non sono più sincronizzate; talvolta sono nello stesso verso e talvolta nel verso opposto. La forza esterna non è risonante, quindi talvolta compie lavoro negativo. Il lavoro risultante fatto dalla forza esterna diminuisce se la frequenza della forza esterna si allontana dalla condizione di risonanza. Pertanto, l'energia e l'ampiezza dell'oscillatore sono minori che in condizioni di risonanza.

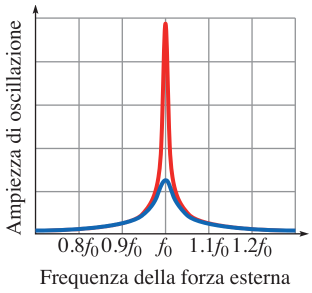


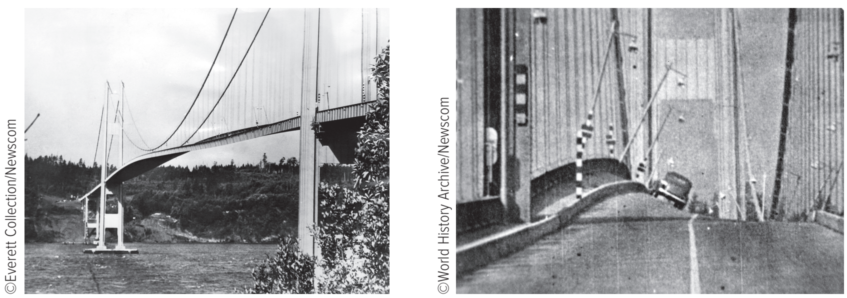
Figura 10.28 Due curve di risonanza per un oscillatore con frequenza naturale f_0. L'ampiezza della forza esterna è costante. Nel grafico in rosso, lo smorzamento dell'oscillatore è un quarto di quello nel grafico blu.

Applicazioni della risonanza

Oscillazioni di grande ampiezza dovute a risonanza possono essere pericolose in alcune circostanze. I materiali possono essere sottoposti a sforzo oltre il loro limite di elasticità, provocando deformazioni permanenti o fratture. Nel 1940, il vento ha messo in oscillazione con ampiezza crescente il ponte Tacoma Narrows nello Stato di Washington (Figura 10.29). Le turbolenze dell'aria che passava attraverso il ponte facevano fluttuare la pressione dell'aria con una frequenza che coincideva con una delle frequenze di risonanza del ponte. Il ponte venne chiuso, perché l'ampiezza delle oscillazioni cresceva; poco dopo, il ponte crollò. Oggi gli ingegneri progettano i ponti con frequenze di risonanza molto più elevate, in modo tale che il vento non possa innescare oscillazioni risonanti.

Oscillazione di un ponte

Nel XIX secolo, i ponti venivano talvolta messi in oscillazione risonante quando il ritmo di marcia dei soldati coincideva con una frequenza risonante del ponte. Dopo il crollo di parecchi ponti a causa della risonanza, ai soldati fu imposto di rompere il passo durante l'attraversamento di un ponte per eliminare il pericolo che il loro ritmo mettesse il ponte in risonanza.



(a) (b)

Figura 10.29 (a) Il ponte Tacoma Narrows inizia a vibrare. (b) Il movimento di torsione è diventato così ampio che alla fine la carreggiata è crollata.

Riepilogo

- Una deformazione è una variazione delle dimensioni o della forma di un corpo.
- Quando le forze che causano la deformazione vengono tolte, un corpo *elastico* ritorna alla sua forma e dimensioni originari.
- La legge di Hooke, in una forma generalizzata, afferma che la modificazione di un materiale (misurata tramite la grandezza deformazione) è proporzionale all'intensità della forza che causa la deformazione (misurata tramite la grandezza sforzo). Le definizioni di sforzo e di deformazione sono quelle riportate nella tabella che segue.

Tipo di deformazione

	Di trazione o di compressione	Di taglio	Di volume
Sforzo	Forza per unità di area della sezione trasversale, F/A	Rapporto tra forza di taglio e area della superficie parallela sulla quale essa agisce, F/A	Pressione, P
Deformazione	Variazione relativa di lunghezza, $\Delta L/L$	Rapporto tra spostamento relativo Δx e distanza L tra le due superfici parallele, $\Delta x/L$	Variazione relativa di volume, $\Delta V/V$
Costante di proporzionalità	Modulo di Young, Y	Modulo di scorrimento, S	Modulo di compressione, B

- Se lo sforzo di trazione o di compressione supera il *limite di proporzionalità*, la deformazione non è più proporzionale allo sforzo. Il solido ritorna ancora alla sua lunghezza originaria quando lo sforzo viene tolto a condizione che lo sforzo non superi il *limite di elasticità*. Se lo sforzo supera il limite di elasticità, il materiale si deforma in modo permanente. Per sforzi ancora maggiori, il solido si rompe quando lo sforzo raggiunge il *carico di rottura*. Lo sforzo massimo che può essere sopportato senza che si produca rottura è chiamato *limite di resistenza*.
- Le oscillazioni si verificano in prossimità di un punto di equilibrio stabile. Un punto di equilibrio è *stabile* se la forza risultante su un corpo, quando questo viene spostato dall'equilibrio, è diretta verso il punto di equilibrio. Tale tipo di forza è denominata forza di richiamo perché tende a ripristinare l'equilibrio.
- Il moto armonico semplice è un moto periodico che avviene ogniqualvolta la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Nel moto armonico semplice, la posizione, la velocità e l'accelerazione sono funzioni sinusoidali del tempo (cioè funzione seno o coseno). Un qualsiasi moto oscillatorio è approssimativamente armonico semplice se l'ampiezza è piccola, perché per piccole oscillazioni la forza di richiamo è approssimativamente lineare.
- Nel moto armonico semplice la massima velocità e la massima accelerazione sono:

$$v_m = \omega A \quad \text{e} \quad a_m = \omega^2 A \qquad (10\text{-}21,\ 10\text{-}22)$$

dove ω è la frequenza angolare. L'accelerazione è proporzionale allo spostamento e nel verso opposto a esso:

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (10\text{-}19)$$

- Per il moto armonico semplice le equazioni del moto sono:

$$\begin{array}{ll} \text{se } x = A \text{ per } t = 0, & \text{se } x = 0 \text{ per } t = 0, \\ x = A\cos(\omega t) & x = A\sin(\omega t) \\ v_x = -v_m \sin(\omega t) & v_x = v_m \cos(\omega t) \\ a_x = -a_m \cos(\omega t) & a_x = -a_m \sin(\omega t) \end{array}$$

In tutti i casi, la velocità è in anticipo di di ciclo rispetto alla posizione e l'accelerazione è in anticipo di $\frac{1}{4}$ di ciclo rispetto alla velocità.
- La frequenza angolare per un sistema massa-molla è:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (10\text{-}20a)$$

Per un pendolo semplice essa è:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (10\text{-}26a)$$

e per un pendolo fisico è:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (10\text{-}28a)$$

- In assenza di forze dissipative, l'energia meccanica totale di un oscillatore armonico semplice è costante e proporzionale al quadrato dell'ampiezza:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad (10\text{-}13)$$

dove il valore dell'energia potenziale è stato posto uguale a zero nel punto di equilibrio. In ciascun punto, la somma della energia cinetica e di quella potenziale è costante:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad (10\text{-}12)$$

Problema o quesito di tipo concettuale e quantitativo

Applicazione biologica o medica

1. Problemi o quesiti con unità di misura non SI

Livello di difficoltà:

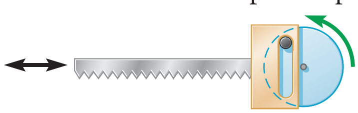
Nessun ✦ semplice

✦ medio

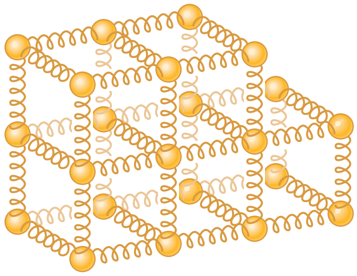
✦✦ alto

Quesiti

1. Il modulo di Young del diamante è circa 20 volte più grande di quello del vetro. Questo dato indica quale dei due materiali è più resistente? In caso contrario, cosa indica?
2. Un orologio a pendolo va avanti. Per regolarlo, bisogna allungare o accorciare il pendolo? Spiegare.
3. Uno studente di karate colpisce verso il basso una pila di blocchi di cemento poggiati su entrambe le estremità. Uno dei blocchi si rompe. Indicare dove comincia a rompersi, se alla base o in cima. (Il blocco è sottoposto a sforzi di taglio, di compressione e di trazione. Tenere presente che il cemento ha una resistenza a trazione molto minore di quella a compressione. Quale parte del blocco viene tesa e quale compressa quando il blocco si piega al centro?)
4. Una barra cilindrica di acciaio è compressa a causa dell'applicazione di forze di intensità F su entrambe le estremità. Che intensità dovrebbero avere le forze per comprimere della stessa entità (a) una barra di acciaio con sezione trasversale di uguale area ma di lunghezza metà? (b) una barra di acciaio della stessa lunghezza ma di raggio metà?
5. Le colonne costruite dagli antichi Greci e Romani per sostenere templi e altre strutture sono assottigliate all'estremità; sono più spesse alla base che in cima. Ciò ha certamente una finalità estetica, ma c'è anche uno scopo di tipo tecnico? Quale potrebbe essere?
6. Spiegare come mai il periodo di un sistema massa-molla è indipendente dall'ampiezza, anche se la distanza percorsa durante ogni ciclo è proporzionale all'ampiezza.
7. In una sega alternativa, uno *Scotch yoke* converte la rotazione del motore nel movimento lineare avanti-indietro della lama. Lo "Scotch yoke" è un dispositivo meccanico utilizzato per convertire un moto oscillatorio in un moto circolare o *viceversa*. Una ruota con un pomello fisso ruota con velocità angolare costante; il pomello è vincolato all'interno di una guida verticale che fa muovere la lama della sega orizzontalmente senza che si muova verticalmente. Il moto della lama della sega è un moto armonico semplice? Spiegare.



8. Una massa appesa verticalmente a una molla e un pendolo semplice hanno sulla Terra lo stesso periodo di oscillazione di 1 s. Un astronauta trasporta i due dispositivi su un altro pianeta dove il campo gravitazionale è più intenso di quello sulla Terra. Per ciascuno dei due sistemi, stabilire se il periodo è adesso più lungo di 1 s, più breve di 1 s, o uguale a 1 s. Illustrare il ragionamento utilizzato.
9. Un saltatore con cavo elastico si lancia da un ponte e si ferma pochi centimetri al di sopra della superficie dell'acqua al di sotto. In tale posizione più bassa, la tensione del cavo elastico è uguale al peso del saltatore? Spiegare perché sì o perché no.
10. È necessaria una forza maggiore per rompere una fune più lunga o una fune più corta? Assumere che le funi sono identiche tranne che per la lunghezza e che sono ideali – non ci sono punti deboli. È necessaria più *energia* per rompere la fune lunga o la fune corta? Spiegare.
11. Un pilota sta eseguendo cerchi della morte verticali sull'oceano a mezzogiorno. L'aeroplano accelera mentre si avvicina alla base della traiettoria circolare e rallenta quando si avvicina in cima alla traiettoria. Un osservatore in un elicottero sta osservando l'ombra dell'aeroplano sulla superficie dell'acqua. L'ombra mostra un moto armonico semplice? Spiegare.
12. È più probabile trovare barre di acciaio in una trave orizzontale di cemento o in un pilastro verticale di cemento? Il cemento ha maggiore bisogno di essere rinforzato se sottoposto a sforzi di trazione o di compressione?
13. Supponiamo che sia necessaria una forza di trazione di intensità F per produrre una data deformazione $\Delta L/L$ in un cavo di acciaio con sezione trasversale di area A. Se due di questi cavi affiancati vengono allungati contemporaneamente, qual è l'intensità della forza di trazione necessaria per produrre la stessa deformazione? Considerando un cavo spesso come due (o più) cavi più sottili affiancati, spiegare perché la forza per produrre una data deformazione deve essere proporzionale all'area della sezione trasversale. Pertanto, la deformazione dipende dallo sforzo – la forza per unità di area.
14. Consideriamo un solido cristallino come un insieme di atomi collegati da molle ideali. Quando un filo viene allungato, in che modo l'allungamento del filo è correlato all'allungamento di ciascuna delle molle interatomiche? Utilizzare la risposta per spiegare perché un dato sforzo di trazione produce un allungamento del filo proporzionale alla lunghezza iniziale del filo – o, in altre



parole, che un dato sforzo produce la stessa deformazione in fili di lunghezza diversa.

15. Quali sono i vantaggi di usare i concetti di sforzo e deformazione per descrivere i cambiamenti di forma?
16. Una vecchia autostrada è stata costruita con blocchi di cemento di uguale lunghezza. Una macchina in moto su questa autostrada subisce un piccolo sobbalzo in corrispondenza della giunzione tra due blocchi. Per i passeggeri nella macchina il viaggio è scomodo a una velocità di 45 miglia/h, ma molto più tranquillo sia a velocità minori che maggiori di questa. Spiegare.
17. Il periodo di oscillazione di un pendolo semplice non dipende dalla massa del peso. Al contrario, il periodo di un sistema massa-molla dipende dalla massa. Spiegare questa apparente contraddizione. (*Aiuto*: Chi fornisce la forza di richiamo nei due casi? In che modo la forza di richiamo dipende dalla massa?)
18. Una massa collegata a una molla ideale oscilla senza attrito su una superficie orizzontale. Disegnare i grafici dell'energia cinetica, dell'energia potenziale e dell'energia totale in funzione del tempo per un ciclo completo.

Quesiti a risposta multipla

Quesiti 1-4. Un corpo è appeso verticalmente a una molla ideale. La molla si trova inizialmente nella sua posizione a riposo. Il corpo viene quindi lasciato libero e oscilla intorno alla posizione di equilibrio.

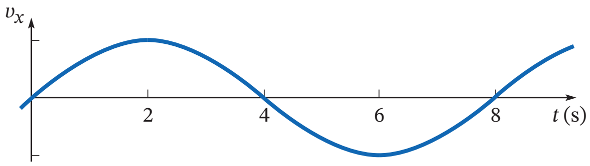
Possibili risposte per i Quesiti 1-4:

(a) La molla è a riposo.
(b) Il corpo è nel punto di equilibrio.
(c) La molla è nella condizione di massimo allungamento.
(d) La molla è in una condizione compresa tra il punto di equilibrio e il massimo allungamento.

1. L'accelerazione ha la sua massima intensità ed è diretta verso l'alto quando:
2. La velocità del corpo è massima quando:
3. L'accelerazione del corpo è zero quando:
4. L'accelerazione ha la sua massima intensità ed è diretta verso il basso quando:
5. Due pendoli semplici, A e B, hanno la stessa lunghezza, ma la massa di A è il doppio della massa di B. Le loro ampiezze di oscillazioni sono uguali. I loro periodi sono rispettivamente T_A e T_B e le loro energie sono E_A e E_B. Scegliere la relazione corretta.
   (a) $T_A = T_B$ ed $E_A > E_B$
   (b) $T_A > T_B$ ed $E_A > E_B$
   (c) $T_A > T_B$ ed $E_A < E_B$
   (d) $T_A = T_B$ ed $E_A < E_B$
6. Una forza F applicata a entrambe le estremità di un filo di acciaio (lunghezza L, diametro d) lo allunga di 1.0 mm. Di quanto la stessa forza F allunga un altro filo di acciaio, di lunghezza $2L$ e diametro $2d$?
   (a) 0.50 mm
   (b) 1.0 mm
   (c) 2.0 mm
   (d) 4.0 mm
   (e) 0.25 mm
7. Un materiale rigido è caratterizzato da:
   (a) Limite di resistenza elevato.
   (b) Carico di rottura elevato.
   (c) Modulo di Young elevato.
   (d) Limite di proporzionalità elevato.
8. Un materiale fragile è caratterizzato da:
   (a) Carico di rottura elevato e modulo di Young piccolo.
   (b) Carico di rottura piccolo e modulo di Young elevato.
   (c) Carico di rottura elevato e modulo di Young elevato.
   (d) Carico di rottura piccolo e modulo di Young piccolo.
9. Quale coppia di grandezze può essere espressa con la stessa unità di misura?
   (a) Sforzo e deformazione
   (b) Modulo di Young e deformazione
   (c) Modulo di Young e sforzo
   (d) Limite di resistenza e deformazione
10. Due fili hanno lo stesso diametro e la stessa lunghezza. Uno è fatto di rame, l'altro di ottone. I fili sono collegati alle estremità. Quando le estremità libere sono tirate in verso opposto, i due fili *devono* avere uguale
   (a) sforzo.
   (b) deformazione.
   (c) limite di resistenza.
   (d) allungamento
   (e) modulo di Young.

Quesiti 11-20. Osservare il grafico di $v_x(t)$ di un corpo in moto armonico semplice. Possibili risposte per ciascun quesito:

(a) 1 s, 2 s, 3 s	(b) 5 s, 6 s, 7 s
(c) 0 s, 1 s, 7 s, 8 s	(d) 3 s, 4 s, 5 s
(e) 0 s, 4 s, 8 s	(f) 2 s, 6 s
(g) 3 s, 5 s	(h) 1 s, 3 s
(i) 5 s, 7 s	(j) 3 s, 7 s
(k) 1 s, 5 s	



Quesiti a risposta multipla 11-20

11. Quando l'energia cinetica è massima?

12. Quando l'energia cinetica è zero?

13. Quando l'energia potenziale è massima?

14. Quando l'energia potenziale è minima?

15. Quando il corpo si trova nel punto di equilibrio?

16. Quando l'accelerazione ha la massima intensità?

17. Quale risposta indica gli istanti in cui la forza risultante è nella direzione $+x$?

18. Quale risposta indica gli istanti in cui il corpo si trova dalla parte $-x$ rispetto al punto di equilibrio ($x < 0$)?

19. Quale risposta indica gli istanti in cui il corpo si sta allontanando dal punto di equilibrio?

20. Quale risposta indica gli istanti in cui l'energia potenziale sta diminuendo?

Problemi

1. Una trave in acciaio è collocata verticalmente nelle fondamenta di un edificio per impedire il cedimento del pavimento. Il carico sulla trave è 5.8×10^4 N, la lunghezza della trave è 2.5 m e l'area della sezione trasversale della trave è 7.5×10^{-3} m^2. Trovare la compressione verticale della trave.

2. La lunghezza a riposo del femore di un uomo di 91 kg è 0.50 m, l'area della sua sezione trasversale è 7.0×10^{-4} m^2 e il suo modulo di Young è 1.1×10^{10} N/m^2. Di quanto si comprime il femore quando l'uomo sta in posizione eretta su entrambi i piedi?

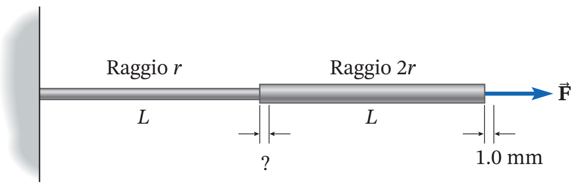
3. Un filo di ottone con modulo di Young 9.2×10^{10} Pa è lungo 2.0 m e l'area della sua sezione trasversale è 5.0 mm^2. Se un peso di 5.0 kN viene appeso al filo, di quanto questo si allunga?

4. Un filo lungo 5.00 m e con sezione trasversale di area 0.100 cm^2 si allunga di 6.50 mm quando gli viene appeso un carico di 1.00 kN. Qual è il modulo di Young di questo filo?

5. Una pulce impiega 1.0×10^{-3} s per raggiungere una velocità massima di 0.74 m/s. (a) Se la massa della pulce è 0.45×10^{-6} kg, qual è la potenza media richiesta? (b) I muscoli dell'insetto sviluppano al massimo una potenza di 60 W/kg. Se il 20% del peso dell'insetto è costituito da muscoli, riescono i muscoli a fornire la potenza necessaria? (c) La pulce ha alla base della zampa posteriore un cuscinetto in resilina che si comprime quando la pulce piega la zampa per saltare. Se assumiamo che il cuscinetto è un cubo di lato 6.0×10^{-5} m e che il cuscinetto si comprime completamente, qual è l'energia immagazzinata nella compressione dei cuscinetti delle due zampe posteriori? Il modulo di Young della resilina è 1.7×10^6 N/m^2. (d) C'è sufficiente potenza per il salto?

6. Il modulo di Young di una corda di chitarra lunga 0.50 m, con sezione trasversale di area 1.0×10^{-6} m^2, è $Y = 2.0 \times 10^9$ N/m^2. Di quanto bisogna allungare la corda per ottenere una tensione di 20 N?

7. Due fili di acciaio (della stessa lunghezza e raggio diverso) sono collegati alle estremità, e attaccati a una parete. Una forza applicata allunga di 1.0 mm i due fili attaccati. Di quanto si sposta il *punto medio*?



8. L'adduttina è una proteina elastica trovata nelle conchiglie, con modulo di Young 4.0×10^6 N/m^2. Viene utilizzata come articolazione a cardine interno, con sezione trasversale di area 0.78 mm^2 e lunghezza a riposo di 1.0 mm. Quando i muscoli della conchiglia si rilassano, la conchiglia si apre. Ciò aumenta l'efficienza in quanto i muscoli non devono esercitare alcuna forza per aprire la conchiglia, ma solo per chiuderla. Se i muscoli devono esercitare una forza di 1.5 N per mantenere chiusa la conchiglia, di quanto è compresso il legamento di adduttina?

9. Utilizzando il grafico sforzo-deformazione dell'osso (Figura 10.4c), calcolare il modulo di Young per trazione e per compressione. Considerare solo piccoli sforzi.

10. Un'acrobata di massa 55 kg sta per appendersi con i denti a un cavo in acciaio e vuole che il cavo non si allunghi oltre il suo limite di elasticità. Il limite di elasticità per il cavo è 2.5×10^8 Pa. Qual è il minimo diametro che deve avere il cavo per sostenerla?

11. Un capello si rompe se sottoposto a una tensione di 1.2 N. Qual è il diametro del capello? La resistenza a trazione è 2.0×10^8 Pa.

12. Il rapporto tra la resistenza a trazione (o a compressione) e la densità di un materiale è una misura di quanto è resistente il materiale "per ogni chilo". (a) Confrontare il tendine (resistenza a trazione 80.0 MPa, densità 1100 kg/m^3) con l'acciaio (resistenza a trazione 0.50 GPa, densità 7700 kg/m^3): qual è il più resistente sotto trazione "per ogni chilo"? (b) Confrontare l'osso (resistenza a compressione 160 MPa, densità 1600 kg/m^3) con il cemento (resistenza a compressione 0.40 GPa, densità 2700 kg/m^3): qual è il più resistente sotto compressione "per ogni chilo"?

13. Qual è il massimo carico che può essere appeso a un filo di rame lungo 1.0 m e di raggio 1.0 mm senza deformare il filo in modo permanente? Il limite di elasticità del rame è 2.0×10^8 Pa e la sua resistenza a trazione è 4.0×10^8 Pa.

14. Qual è il massimo carico che può essere appeso a un filo di rame lungo 1.0 m e di raggio 1.0 mm senza rompere il filo? Il limite di elasticità del rame è 2.0×10^8 Pa e la sua resistenza a trazione è 4.0×10^8 Pa.

15. Una colonna di marmo con area della sezione trasversale 25 cm^2 sostiene un carico di 7.0×10^4 N. Il modulo di Young del marmo è 6.0×10^{10} Pa e la sua resistenza a compressione è 2.0×10^8 Pa. (a) Qual è lo sforzo nella colonna? (b) Qual è la deformazione della colonna? (c) Se la colonna è alta 2.0 m, di quanto è cambiata la sua lunghezza a causa del carico da sostenere? (d) Qual è il massimo peso che può sostenere la colonna?

16. Quando un peso di 120 N viene appeso a un'estremità di un filo di rame lungo 3.0 m si osserva che questo si allunga di 2.1 mm. (a) Qual è il diametro del filo e qual è lo sforzo di trazione nel filo? (b) Se la resistenza a trazione del rame è 4.0×10^8 N/m^2, qual è il massimo peso che può essere appeso a questo filo?

17. Il femore si rompe se sottoposto a una forza di compressione di circa 5×10^4 N per l'uomo e di 10×10^4 N per il cavallo. La resistenza a compressione del femore umano è 1.6×10^8 Pa, mentre la resistenza a compressione del femore del cavallo è 1.4×10^8 Pa. Qual è l'area effettiva della sezione trasversale del femore umano e di quello del cavallo? (*Nota*: poiché la parte centrale del femore contiene midollo osseo, che praticamente non ha resistenza a compressione, l'area effettiva della sezione trasversale è circa l'80% dell'area totale della sezione trasversale.)

18. La massima deformazione di un filo di acciaio con modulo di Young 2.0×10^{11} N/m^2, appena prima di rompersi, è lo 0.20%. Qual è lo sforzo in corrispondenza del suo carico di rottura, assumendo che la deformazione sia proporzionale allo sforzo fino al carico di rottura?

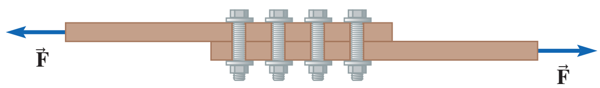
19. Una sfera di rame è sottoposta a una pressione di 100 MPa. Il modulo di compressione del rame è 130 GPa. Di quale frazione cambia il volume della sfera? Di quale frazione cambia il raggio della sfera?

20. Di quale percentuale aumenta la densità dell'acqua a una profondità di 1.0 km al di sotto della superficie?

21. La pressione atmosferica su Venere è circa 90 volte quella sulla Terra. Il volume di una sfera di acciaio con modulo di compressione 160 GPa è 1.00 cm^3 sulla Terra. Se fosse messa in una camera a pressione e la pressione fosse aumentata fino a quella di Venere (9.12 MPa), come cambierebbe il suo volume?

22. Come cambierebbe il volume di 1.00 cm^3 di alluminio sulla Terra, se fosse posto in una camera a vuoto e la pressione fosse modificata fino a quella della Luna (minore di 10^{-9} Pa)?

23. Due piastre di acciaio sono tenute assieme da quattro bulloni. Il modulo di scorrimento di ciascun bullone è 8.0×10^{10} Pa e la resistenza allo scorrimento è 6.0×10^8 Pa. Il raggio di ciascun bullone è 1.0 cm. In condizioni normali, i bulloni tengono le due piastre bloccate assieme e la forza di attrito tra le piastre impedisce loro di slittare. Se i bulloni vengono allentati, allora la forza di attrito è piccola e gli stessi bulloni sarebbero sottoposti a uno sforzo di taglio elevato. Qual è la massima forza di taglio F sulle piastre che possono sopportare i bulloni?



24. Un'ancora di ghisa con modulo di compressione 60.0×10^9 Pa e volume 0.230 m^3 viene calata lungo la fiancata della nave fino al fondo del porto dove la pressione è più grande della pressione al livello del mare di 1.75×10^6 Pa. Trovare la variazione di volume dell'ancora.

25. La superficie superiore di un cubo di gelatina, di lato 5.0 cm, viene spostata di 0.64 cm da una forza tangente. Se il modulo di scorrimento della gelatina è 940 Pa, qual è l'intensità della forza tangente?

26. Su due facce opposte di area 42 cm^2 di una grossa spugna vengono applicate in verso opposto due forze di intensità 12 N (vedi Figura.10.8). Lo spessore della spugna (L) è 2.0 cm. L'angolo di defor-

mazione (γ) è 8.0°. (a) Quanto è Δx? (b) Qual è il modulo di scorrimento della spugna?

27. In un parco giochi, un cavallino di legno è fissato al terreno tramite una molla robusta. Quando un bambino di 24 kg si siede sul cavallino, la molla si comprime di 28 cm. Con il bambino seduto sul cavallino, la molla oscilla verticalmente con una frequenza di 0.88 Hz. Qual è la frequenza di oscillazione della molla quando non c'è nessuno seduto sul cavallino?

28. Il periodo di oscillazione di un corpo in un sistema massa-molla ideale è 0.50 s e l'ampiezza è 5.0 cm. Qual è la velocità nel punto di equilibrio?

29. Il periodo di oscillazione di un sistema massa-molla è 0.50 s e l'ampiezza è 5.0 cm. Qual è l'intensità dell'accelerazione nel punto di massimo allungamento della molla?

30. L'ago di una macchina da cucire si muove con rapido moto oscillatorio, che si può quasi considerare armonico semplice, mentre esegue una cucitura. Supponiamo che l'ago si sposta di 8.4 mm tra la sua posizione più alta e quella più bassa e che fa 24 punti in 9.0 s. Qual è la massima velocità dell'ago?

31. L'asta di un diapason si muove avanti e indietro quando viene messa in oscillazione. La distanza percorsa dall'asta tra le sue posizioni estreme è 2.24 mm. Se la frequenza del diapason è 440.0 Hz, quali sono la massima velocità e la massima accelerazione dell'asta? Si assuma un moto armonico semplice.

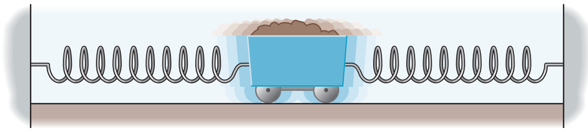
32. Un corpo di 170 g attaccato a una molla oscilla da sinistra a destra su una superficie senza attrito con frequenza di 3.00 Hz e un'ampiezza di 12.0 cm. (a) Qual è la costante elastica della molla? (b) Se il corpo parte da $x = 12.0$ cm per $t = 0$ e il punto di equilibrio è in $x = 0$, quale equazione descrive la sua posizione in funzione del tempo?

33. Dimostrare che l'equazione $a = -\omega^2 x$ è coerente per quanto riguarda le dimensioni e che $\sqrt{k/m}$ ha le stesse dimensioni di ω.

34. Le ali di un uccellino possono subire uno spostamento massimo di 5.0 cm (distanza tra la punta dell'ala e l'orizzontale). Se la massima accelerazione delle ali è 12 m/s^2 e se assumiamo che durante il battito le ali compiono un moto armonico semplice, qual è la frequenza di oscillazione della punta delle ali?

35. Un carrello vuoto, legato tra due molle ideali, oscilla con $\omega = 10.0$ rad/s. Sul carrello viene posto un carico, che fa aumentare di 4.0 volte la massa totale. Qual è il nuovo valore di ω?

36. Un carrello di massa m è attaccato tra due molle ideali, ognuna di costante elastica k. Si assuma che il carrello possa oscillare senza attrito. (a) Qual è l'intensità della forza che agisce sul carrello, quando il carrello viene spostato di una piccola distanza x dalla sua posizione di equilibrio? (b) Qual è la frequenza angolare, in funzione di m, x e k per questo carrello?



Problemi 35 e 36

37. Le variazioni della pressione dell'aria in un'onda sonora fanno vibrare il timpano. (a) Per una data ampiezza di oscillazione, la massima velocità e la massima accelerazione del timpano sono più grandi per i suoni ad alta frequenza o per quelli a bassa frequenza? (b) Trovare la massima velocità e accelerazione del timpano per oscillazioni di ampiezza 1.0×10^{-8} m a una frequenza di 20.0 Hz. (c) Ripetere (b) per la stessa ampiezza ma a una frequenza di 20.0 kHz.

38. Dimostrare che, nel moto armonico semplice, i valori massimi dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione sono collegati da $v_m^2 = a_m A$.

39. Le apparecchiature da utilizzare negli aeroplani o nelle astronavi vengono spesso sottoposte a prove di vibrazione per essere certi che possano sopportare le oscillazioni che si possono verificare durante il volo. Un radioricevitore di massa 5.24 kg è posto su una piattaforma che oscilla con moto armonico semplice a 120 Hz e con un'accelerazione massima di 98 m/s^2 (= 10g). Trovare (a) il massimo spostamento del radioricevitore, (b) la sua velocità massima e (c) la massima forza risultante esercitata su di esso.

40. In un laboratorio per prove di volo, i piloti sono soggetti a oscillazioni verticali su una piattaforma oscillante per capire fino a che punto possono riconoscere oggetti in occasione di forti vibrazioni dell'aeroplano. La frequenza può essere variata da 0.02 fino a 40.0 Hz e l'ampiezza può essere regolata fino a 2 m per basse frequenze. Quali sono la massima velocità e la massima accelerazione alle quali è soggetto il pilota se la frequenza è regolata a 25.0 Hz e l'ampiezza a 1.00 m?

41. Il diaframma di un altoparlante ha una massa di 50.0 g e risponde a un segnale di frequenza 2.0 kHz oscillando con ampiezza 1.8×10^{-4} m a tale frequenza. (a) Qual è la massima forza che agisce sul diaframma? (b) Qual è l'energia meccanica del diaframma?

42. La costante elastica di una molla ideale è $k = 25$ N/m. La molla è appesa verticalmente. Un corpo di 1.0 kg viene attaccato alla molla quando questa non è allungata e viene quindi lasciato libero. Di conseguenza comincia a oscillare. (a) Qual è l'intensità dell'accelerazione del corpo quando l'allungamento della molla è massimo? (b) Qual è il massimo allungamento della molla?

43. Una molla ideale con costante elastica 15 N/m è appesa verticalmente. Un corpo di massa 0.60 kg viene attaccato alla molla quando questa non è allungata e quindi lasciato libero. (a) Qual è l'allungamento della molla quando la velocità è massima? (b) Qual è la massima velocità?

44. Un corpo di 0.50 kg, appeso a una molla ideale di costante elastica 25 N/m, sta oscillando verticalmente. Qual è la variazione di energia cinetica che si verifica quando il corpo si muove dalla posizione di equilibrio fino a un punto 5.0 cm più basso?

45. La massa di una piccola barca a remi è 47 kg. Quando una persona di 92 kg entra nella barca, la barca galleggia in acqua 8.0 cm più in basso. Se la barca viene quindi spinta leggermente ancora più in profondità nell'acqua, essa oscillerà con moto armonico semplice (trascurare l'attrito). Quale sarà il periodo di oscillazione della barca mentre oscilla rispetto alla posizione di equilibrio?

46. Un tipo di altalena per bambini consiste in un sediolino di tela appeso all'architrave di una porta tramite una corda elastica. La lunghezza della corda a riposo è 1.2 m e la corda si allunga di 0.20 m quando un bambino di massa 6.8 kg viene messo sul seggiolino. La madre tira quindi il seggiolino verso il basso di 8.0 cm e lo rilascia. (a) Qual è il periodo del moto? (b) Qual è la massima velocità del bambino?

47. Lo spostamento di un corpo in moto armonico semplice è dato da $y(t) = (8.0\ \text{cm}) \sin[(1.57\ \text{rad/s})t]$. Qual è la frequenza di oscillazione?

48. Un corpo di massa 306 g è attaccato alla base di una molla, di costante elastica 25 N/m, che pende dal soffitto. Sulla parte posteriore del corpo è attaccata una penna, in modo tale che possa scrivere su un foglio di carta posto dietro il sistema massa-molla. Trascurare l'attrito. (a) Descrivere la curva tracciata sulla carta quando il corpo è tenuto al di sopra del punto di equilibrio e quindi rilasciato al tempo $t = 0$. (b) L'esperimento viene ripetuto, ma questa volta la carta si muove verso sinistra a velocità costante mentre la penna ci scrive sopra. Disegnare la curva tracciata sulla carta. Immaginare che la carta sia abbastanza lunga da non esaurirsi dopo parecchie oscillazioni.

49. Un corpo è appeso verticalmente a una molla ideale di costante elastica 2.5 N/m. Inizialmente la molla è nella sua posizione a riposo. Il corpo viene quindi rilasciato e oscilla intorno alla sua posizione di equilibrio. Il moto è descritto da:

$$y = (4.0\ \text{cm}) \sin[(0.70\ \text{rad/s})t]$$

Qual è la massima energia cinetica del corpo?

50. (a) Riportare su grafico $x(t) = A \sin \omega t$ (la posizione di un corpo in moto armonico semplice che si trova nella posizione di equilibrio per $t = 0$). (b) Analizzando la pendenza del grafico di $x(t)$, disegnare un grafico di $v_x(t)$. $v_x(t)$ è una funzione seno o coseno? (c) Analizzando la pendenza del grafico di $v_x(t)$, fare un grafico di $a_x(t)$. (d) Verificare che $v_x(t)$ è in anticipo di $\frac{1}{4}$ di ciclo su $x(t)$ e che $a_x(t)$ è in anticipo di $\frac{1}{4}$ di ciclo su $v_x(t)$.

51. Un sistema massa-molla oscilla con ampiezza A e frequenza angolare ω. (a) Qual è la velocità *media* durante un ciclo di oscillazione completo? (b) Qual è la velocità massima? (c) Trovare il rapporto tra la velocità media e quella massima. (d) Fare un grafico di $v_x(t)$ e fare riferimento a esso per spiegare perché questo rapporto è maggiore di $\frac{1}{2}$.

52. C Una palla viene lasciata cadere da un'altezza h sul pavimento e comincia a rimbalzare. Non viene dissipata energia, quindi la palla si riporta all'altezza originaria h dopo ogni rimbalzo. Fare il grafico di $y(t)$ ed elencare varie caratteristiche del grafico che indicano che questo moto *non* è armonico semplice.

53. Un corpo di 230.0 g attaccato a una molla oscilla orizzontalmente su una superficie senza attrito con frequenza 2.00 Hz. La sua posizione in funzione del tempo è data da $x = (8.00\ \text{cm}) \sin(\omega t)$. (a) Riportare su grafico l'energia potenziale elastica in funzione del tempo. (b) La velocità del corpo è data da $v_x = \omega\ (8.00\ \text{cm}) \cos(\omega t)$. Riportare su grafico l'energia cinetica del sistema in funzione del tempo. (c) Riportare su grafico la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in funzione del tempo. (d) Descrivere qualitativamente come cambierebbero le risposte se la superficie non fosse priva di attrito.

54. ✦ (a) Data $x(t) = A \cos \omega t$, dimostrare che $v_x(t) = -\omega A \sin \omega t$. (*Aiuto*: disegnare il vettore velocità per il punto P in Figura 10.14b e trovare quindi la sua componente x.) (b) Verificare che le espressioni per $x(t)$ e per $v_x(t)$ sono coerenti con la conservazione dell'energia. [*Aiuto*: utilizzare l'uguaglianza trigonometrica $\sin^2 \omega t + \cos^2(\omega t) = 1$.]

55. Qual è il periodo di un pendolo costituito da una massa di 6.0 kg che oscilla appesa a una corda lunga 4.0 m?

56. Un pendolo di lunghezza 75 cm e di massa 2.5 kg oscilla con energia meccanica 0.015 J. Qual è l'ampiezza?

57. Una massa di 0.50 kg è appesa a una corda, formando un pendolo. Il periodo di questo pendolo è 1.5 s quando l'ampiezza è 1.0 cm. La massa del pendolo viene quindi ridotta a 0.25 kg. Qual è adesso il periodo di oscillazione, quando l'ampiezza è 2.0 cm?

58. Un peso di massa m è appeso a una corda di lunghezza L, formando un pendolo. Il periodo di questo pendolo è 2.0 s. Se il peso del pendolo è sostituito con uno di massa $\frac{1}{3}m$ e la lunghezza del pendolo viene aumentata fino a $2L$, qual è il periodo di oscillazione?

59. Un pendolo (massa m, lunghezza incognita) si muove seguendo la legge $x = A\sin(\omega t)$. (a) Scrivere la legge per $v_x(t)$ e disegnare un ciclo del grafico di $v_x(t)$. (b) Qual è la massima energia cinetica?

60. Un orologio ha un pendolo che compie un'oscillazione completa ogni 1.0 s (avanti *e* indietro). Il corpo all'estremità del pendolo pesa 10.0 N. Qual è la lunghezza del pendolo?

61. Il periodo di un pendolo di lunghezza L_1 è $T_1 = 0.950$ s. La lunghezza del pendolo viene regolata fino a un nuovo valore L_2 così che $T_2 = 1.00$ s. Qual è il rapporto L_2/L_1?

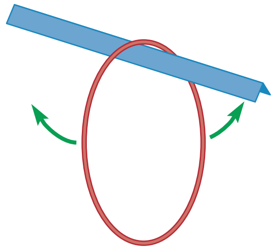
62. ✦Un pendolo lungo 120 cm oscilla con ampiezza 2.0 cm. La sua energia meccanica è 5.0 mJ. Qual è l'energia meccanica dello stesso pendolo quando oscilla con ampiezza 3.0 cm?

63. Ⓒ Il periodo di un orologio a pendolo è 0.650 s sulla Terra. Viene trasportato su un altro pianeta e si trova che il suo periodo è 0.862 s. La variazione di lunghezza del pendolo è trascurabile. (a) L'intensità del campo gravitazionale sull'altro pianeta è maggiore o minore di quella sulla Terra? (b) Trovare l'intensità del campo gravitazionale sull'altro pianeta.

64. ✦Cristina ha un orologio a pendolo con un pendolo lungo 1000 m. (a) Se consideriamo il pendolo come un pendolo semplice, quale sarebbe il periodo? (b) Cristina misura il periodo reale dell'orologio, e trova che esso è 1.00% più veloce di quello di un pendolo semplice lungo 1000 m. Se Cristina considera il pendolo come due corpi, un filo sottile uniforme lungo 1.000 m e una massa puntiforme posta a 1000 m dall'asse di rotazione, quale percentuale della massa totale del pendolo si trova nel filo sottile uniforme?

65. Un orologio a pendolo è realizzato in modo tale da avere un pendolo semplice che oscilla lateralmente, per una distanza di 20.0 mm in 1.00 s. Qual è la massima velocità del peso del pendolo? Utilizzare due procedure diverse. Nella prima, ipotizzare un moto armonico semplice e usare la relazione tra l'ampiezza e la massima velocità. Nella seconda, utilizzare la conservazione dell'energia.

66. ✦Un cerchio sottile è sospeso sul filo di lama di un coltello. Il suo momento di inerzia riferito all'asse di rotazione (lungo il coltello) è $I = 2mr^2$. Dimostrare che esso oscilla con la stessa frequenza di un pendolo semplice di lunghezza uguale al diametro del cerchio.



67. (a) Qual è l'energia di un pendolo ($L = 1.0$ m, $m = 0.50$ kg) che oscilla con ampiezza 5.0 cm? (b) In un orologio, la perdita di energia del pendolo (dovuta allo smorzamento) viene reintegrata facendo scendere di 1.0 m in una settimana una massa di 2.0 kg. Quale percentuale dell'energia del pendolo viene persa durante un ciclo?

68. ✦✦A causa delle forze dissipative, l'ampiezza di un oscillatore diminuisce del 5.0% in 10 cicli. Quanti cicli sono necessari affinché l'*energia* diminuisca del 5.0%? (*Aiuto*: assumere una perdita costante per ogni ciclo.)

69. ✦L'ampiezza di oscillazione di un pendolo diminuisce di un fattore 20.0 in 120 s. Di quale fattore è diminuita la sua energia nello stesso tempo?

Problemi di riepilogo

70. Quattro persone sono sedute in un'automobile. Le masse delle persone sono 45 kg, 52 kg, 67 kg e 61 kg. La massa dell'automobile è 1020 kg. Quando l'automobile passa su una cunetta, i suoi ammortizzatori provocano un'oscillazione con frequenza 2.00 Hz. Quale sarebbe la frequenza se fosse presente solo la persona di 45 kg?

71. Un pendolo passa da $x = 0$ con velocità 0.50 m/s; esso oscilla fino ad $A = 0.20$ m. Qual è il periodo T del pendolo? (Assumere che l'ampiezza sia piccola.)

72. Qual è la lunghezza di un pendolo semplice la cui posizione orizzontale è descritta da:

$$x = (4.00\ \text{cm})\cos[(3.14\ \text{rad/s})t]?$$

Quale ipotesi bisogna fare per rispondere a questa domanda?

73. ✦✦Una persona lascia cadere una bacchetta di acciaio cilindrica ($Y = 2.0 \times 10^{11}$ Pa) da un'altezza di 1.0 m (distanza tra il pavimento e la base della bacchetta disposta verticalmente). La bacchetta, di lunghezza 0.50 m, raggio 0.75 cm e massa 0.70 kg, colpisce il pavimento e rimbalza, mantenendo la sua orientazione verticale. Assumendo che l'urto con il pavimento sia elastico, e che non avvengano rotazioni, qual è la massima compressione della bacchetta? (*Aiuto*: nel momento di massima compressione, l'energia cinetica è zero e l'energia potenziale elastica nella bacchetta è massima; iniziare trovando la "costante elastica" della bacchetta.)

74. ✦Qual è il periodo di un pendolo realizzato fissando un'asse di rotazione orizzontale (a) attraverso l'estremità di un righello lungo un metro (etichetta 100 cm)? (b) attraverso l'etichetta 75 cm? (c) attraverso l'etichetta 60 cm?

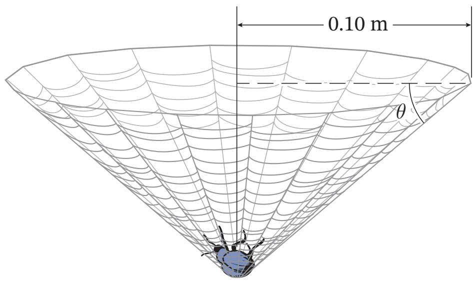
75. Martino ha preso un pesce e vuole sapere quanto pesa, ma non ha una bilancia. Tuttavia, ha un cronometro, una molla e un peso di 4.90 N. Attacca il peso alla molla e trova che la molla compie 20 oscillazioni in 65 s. Quindi appende il pesce alla molla e trova che la molla impiega 220 s per compiere 20 oscillazioni. (a) Prima di rispondere alla parte (b), stabilire se il pesce pesa di più o di meno di 4.90 N. (b) Qual è il peso del pesce?

76. Un pilota della marina deve lanciarsi dall'aeroplano prima che precipiti a mare. Viene recuperato dall'acqua da un elicottero e dondola da un cavo lungo 45 m mentre viene riportato sulla portaerei. Qual è il periodo della sua oscillazione verticale mentre l'elicottero vola a punto fisso sopra la nave?

77. Un corpo di massa m è appeso alla base di una molla ideale che è appesa al soffitto. La costante elastica della molla è k. Il corpo viene tirato in basso a una distanza D dall'equilibrio e poi rilasciato. Successivamente, lo stesso sistema viene messo in oscillazione tirando il corpo in basso a una distanza $2D$ dall'equilibrio e quindi rilasciandolo. (a) Di quanto cambiano il periodo e la frequenza di oscillazione quando lo spostamento iniziale viene aumentato da D a $2D$? (b) Di quanto cambia l'energia totale di oscillazione quando lo spostamento iniziale viene aumentato da D a $2D$? Fornire la risposta come rapporto numerico. (c) Il sistema massa-molla viene messo in oscillazione una terza volta. Questa volta il corpo viene tirato in basso a una distanza $2D$ e gli viene quindi data una spinta verso il basso, così che esso ha una velocità iniziale v_i verso il basso. Confrontare il periodo e la frequenza di oscillazione con quelli trovati nella parte (a). (d) Confrontare l'energia totale con quella del corpo quando è stato rilasciato da fermo dopo uno spostamento $2D$.

78. Una ragnatela può compiere un moto armonico semplice quando una mosca vi si posa sopra e sposta la tela. Per semplicità, si assuma che la ragnatela segue la legge di Hooke (cosa che in realtà non fà in quanto essa si deforma in modo permanente quando viene spostata). Se la tela è inizialmente orizzontale, e una mosca posatasi sulla tela è in equilibrio quando sposta la tela di 0.030 mm, qual è la frequenza di oscillazione quando la mosca si posa?

79. ✦Il filo del ragno ha modulo di Young pari a 4.0×10^9 N/m^2 e può sopportare sforzi fino a 1.4×10^9 N/m^2. L'area della sezione trasversale di un singolo elemento della ragnatela è 1.0×10^{-11} m^2, e una ragnatela è composta di 50 elementi radiali. Un insetto si posa al centro di una ragnatela orizzontale e la tela si allunga verso il basso. (a) Se su ogni elemento viene applicato lo sforzo massimo, quale angolo θ forma la ragnatela con l'orizzontale? (b) Quale deve essere la massa dell'insetto per esercitare lo sforzo massimo sulla ragnatela? (c) Se il raggio della ragnatela è 0.10 m, di quanto si allunga la ragnatela verso il basso?



80. Un sistema massa-molla oscilla in modo tale che la posizione della massa è descritta da $x = -10 \cos(1.57t)$, dove x è in cm e t è in secondi. Fare un grafico segnando un punto in corrispondenza di ciascuna posizione della massa per $t = 0$, $t = 0.2$ s, $t = 0.4$ s, ..., $t = 4$ s. L'intervallo di tempo tra un punto e l'altro deve essere di 0.2 s. In base al grafico, dire dove la massa si sta muovendo più velocemente e dove più lentamente. In che modo è possibile stabilirlo?

81. ✦✦Un pendolo è realizzato con una bacchetta uniforme di massa m_1 e un blocchetto di massa m_2 attaccato alla sua estremità inferiore. (a) Se la lunghezza del pendolo è L e le oscillazioni sono piccole, trovare il periodo di oscillazione in funzione di m_1, m_2, L e g. (b) Discutere la risposta alla parte (a) nei due casi particolari $m_1 >> m_2$ ed $m_1 << m_2$.

82. Un tagliasiepe ha una lama che si muove avanti e indietro con frequenza 28 Hz. Il moto di rotazione effettuato dal motore elettrico viene convertito nel moto oscillatorio della lama tramite uno "Scotch yoke" (vedi Quesito 7). La lama si muove di 2.4 cm in ogni corsa. Nell'ipotesi che la lama si muove di moto armonico semplice, quali sono la massima velocità e la massima accelerazione della lama?

83. ✦ Ⓒ Il moto di un pendolo semplice è approssimativamente armonico semplice solo per piccole ampiezze. Consideriamo un pendolo semplice che viene lasciato da una posizione orizzontale ($\theta_i = 90°$ in Figura 10.23). (a) Utilizzando la conservazione dell'energia, trovare la velocità del peso del pendolo nel punto più basso di oscillazione. Esprimere la risposta in funzione della massa m e della lunghezza L del pendolo. *Non* ipotizzare moto armonico semplice. (b) Nell'ipotesi (non corretta, per tale grande ampiezza) che il moto *sia* armonico semplice, determinare la massima velocità del pendolo. Sulla base delle risposte date, il periodo di un pendolo nel caso di grandi ampiezze è maggiore o minore di quello ricavato tramite l'Equazione (10-26b)?

84. ✦ L'energia potenziale gravitazionale di un pendolo è $U = mgy$. (a) Ponendo $y = 0$ nel punto più basso, dimostrare che $y = L(1 - \cos\theta)$, dove θ è l'angolo che il filo forma con la verticale. (b) Se θ è piccolo, $(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}\theta^2$ e $\theta \approx x/L$ (vedi Appendice A.7). Dimostrare che l'energia potenziale può essere scritta come $U \approx \frac{1}{2}kx^2$ e trovare il valore di k (l'equivalente per il pendolo della costante elastica).

85. Il pendolo semplice può essere considerato come un caso particolare di pendolo fisico dove tutta la massa si trova a distanza L dall'asse di rotazione. Per un pendolo semplice di massa m e lunghezza L, dimostrare che l'espressione per la frequenza angolare di un pendolo fisico [Equazione (10-28a)] si riduce all'espressione della frequenza angolare di un pendolo semplice [Equazione (10-26a)].

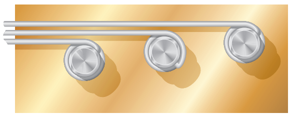
86. Luca sta tentando di catturare un animale fastidioso che continua a mangiare gli ortaggi del suo giardino. Sta costruendo una trappola e ha bisogno di usare una molla che chiuda la porta della trappola. Ha una molla nel garage e ne vuole determinare la costante elastica. Per farlo, appende la molla al soffitto e determina, misurandola, che è lunga 20.0 cm. Quindi appende un mattone di 1.10 kg alla estremità della molla, che si allunga fino a 31.0 cm. (a) Qual è la costante elastica della molla? (b) Successivamente Luca sposta il mattone di 5.00 cm dalla posizione di equilibrio per osservarlo mentre oscilla. Qual è la massima velocità del mattone? (c) Quando lo spostamento è 2.50 cm dalla posizione di equilibrio, qual è la velocità del mattone? (d) Quanto tempo impiega il mattone per compiere cinque oscillazioni?

87. Un corpo di 4.0 N viene appeso a una molla ideale verticale di costante elastica 250 N/m. La molla si trova inizialmente nella sua posizione a riposo. Scrivere un'equazione per descrivere il moto del corpo se questo viene rilasciato per $t = 0$. (*Aiuto*: porre $y = 0$ nel punto di equilibrio e assumere $+y =$ alto.)

88. Dimostrare, utilizzando un'analisi dimensionale, che la frequenza f con la quale oscilla un sistema massa-molla è indipendente dall'ampiezza A e proporzionale a $\sqrt{k/m}$. [*Aiuto*: cominciare ipotizzando che f dipenda da A (elevata a una certa potenza)].

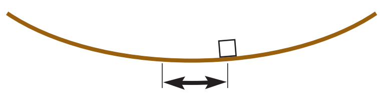
89. Una molla orizzontale con costante elastica 9.82 N/m è attaccata a un blocco di massa 1.24 kg che poggia su una superficie senza attrito. Il blocco possiede una velocità di 0.543 m/s quando si trova a 0.345 m dalla sua posizione di equilibrio. (a) Qual è il massimo spostamento del blocco rispetto alla sua posizione di equilibrio? (b) Qual è la massima velocità del blocco? (c) Qual è la velocità del blocco, quando si trova a 0.200 m dalla posizione di equilibrio?

90. Il diametro di una corda in acciaio per pianoforte ($Y = 2.0 \times 10^{11}$ Pa) è 0.80 mm. Una sua estremità è avvolta attorno a un pirolo di diametro 8.0 mm. La lunghezza della corda (escludendo la parte avvolta intorno al pirolo) è 66 cm. All'inizio, la tensione della corda è 381 N. Per accordare la corda, la tensione deve essere aumentata fino a 402 N. Di quale angolo bisogna ruotare il pirolo?



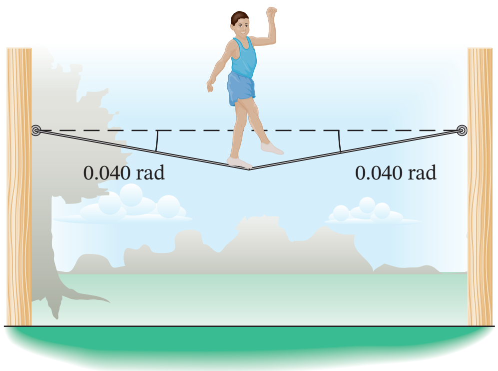
91. Quando la tensione è 402 N, qual è lo sforzo di trazione nella corda di pianoforte del Problema 90? Effettuare un confronto con il limite di elasticità della corda in acciaio per pianoforte (8.26×10^8 Pa).

92. ✦✦ Un cubetto di ghiaccio scivola avanti e indietro senza attrito su una scodella poco profonda di raggio R. Se l'ampiezza di oscillazione è piccola, qual è il periodo di oscillazione?



93. Un gibbone, appeso per un braccio a un ramo orizzontale di un albero, compie oscillazioni di piccola ampiezza. Il centro di massa del gibbone si trova a 0.40 m dal ramo e il rapporto tra il suo momento di inerzia e la sua massa è $I/m = 0.25$ m^2. Fare una stima della frequenza di oscillazione.

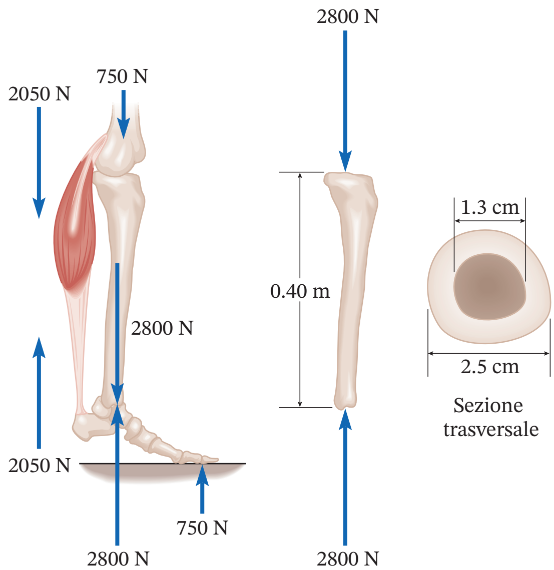
94. Un funambolo che pesa 640 N cammina su un cavo di acciaio. Quando è a metà strada, il cavo forma un angolo di 0.040 rad al di sotto dell'orizzontale. (a) Qual è la deformazione del cavo? Assumere che prima che il funambolo ci cammini sopra, il cavo sia orizzontale con una tensione di 80 N. Trascurare il peso del cavo. (b) Qual è la tensione del cavo quando il funambolo è fermo sul suo punto medio? (c) Qual è l'area della sezione trasversale del cavo? (d) È stato superato il limite di elasticità del cavo (2.5×10^8 Pa)?



Problema 94 (gli angoli di 0.040 rad sono molto ingranditi).

95. La massima altezza di una colonna cilindrica è limitata dalla resistenza a compressione del materiale; se lo sforzo di compressione alla base dovesse oltrepassare la resistenza a compressione del materiale, la colonna si frantumerebbe a causa del suo stesso peso. (a) Calcolare lo sforzo di compressione alla base di una colonna cilindrica di altezza h e raggio r, realizzata con un materiale di densità ρ. (b) Poiché la risposta alla parte (a) è indipendente dal raggio r, esiste un limite assoluto alla altezza di una colonna cilindrica, indipendentemente dalla sua larghezza. Trovare la massima altezza di una colonna cilindrica in marmo, con densità 2.7×10^3 kg/m^3 e resistenza a compressione 2.0×10^8 Pa. (c) Questo limite costituisce un problema pratico nella costruzione di colonne di marmo? Potrebbe limitare l'altezza del gambo di una pianta di fagiolo?

96. Nel Problema 8.33, abbiamo trovato che per una persona (di peso 750 N) in piedi sull'avampiede di un piede, la forza della tibia sull'articolazione della caviglia era 2800 N. Pertanto la giunzione della caviglia spinge verso l'alto la base della tibia con una forza di 2800 N, mentre l'estremità superiore della tibia deve essere sottoposta una forza risultante verso il basso di circa 2800 N (trascurando il peso della stessa tibia). La tibia ha una lunghezza di 0.40 m, un diametro interno medio di 1.3 cm e un diametro esterno medio di 2.5 cm. (La parte centrale dell'osso contiene midollo che ha resistenza a compressione trascurabile.) (a) Trovare il valore medio dell'area della sezione trasversale della tibia. (b) Trovare lo sforzo di compressione nella tibia. (c) Trovare la variazione di lunghezza della tibia causata dalle forze di compressione.



97. Una saltatrice col cavo elastico si lancia da un ponte e compie una serie di oscillazioni. Assumere $g = 9.78$ m/s^2. (a) Qual è il periodo di oscillazione se una saltatrice di 60.0 kg usa una corda elastica con lunghezza a riposo 33.0 m e si lancia da un'altezza di 50.0 m al di sopra di un fiume, fermandosi proprio pochi centimetri al di sopra della superficie dell'acqua dopo la prima discesa verso il basso? Assumere che la corda elastica segua la legge di Hooke. (b) Il prossimo saltatore a turno ha una massa di 80.0 kg. Dovrebbe saltare utilizzando la stessa corda? Spiegare.

98. ✦ La resilina è una proteina elastica che aiuta gli insetti a volare in modo più efficiente. La resilina, attaccata dall'ala al corpo, è a riposo quando l'ala è in basso ed è estesa quando l'ala è in alto. Quando l'ala viene portata in alto, parte dell'energia elastica viene immagazzinata nella resilina. L'ala viene quindi riportata in basso tramite una piccola quantità di energia muscolare, perché l'energia potenziale nella resilina viene riconvertita in energia cinetica. Il modulo di Young della resilina è 1.7×10^6 N/m^2. (a) Se un'ala di insetto ha della resilina con lunghezza a riposo 1.0 cm e area della sezione trasversale 1.0 mm^2, quanta forza deve esercitare l'ala per allungare la resilina fino a 4.0 cm? (b) Quanta energia è immagazzinata nella resilina?

Risposte ai Problemi di verifica

10.1 $2k$ (Quando la molla originaria viene allungata di una quantità L, ognuna delle due metà della molla si allunga solamente di $\frac{1}{2}L$. Per una data forza applicata, l'allungamento di ciascuna nuova molla è la metà di quello della molla originaria.)

10.2 1.4×10^{-5}.

10.3 0.18 mm.

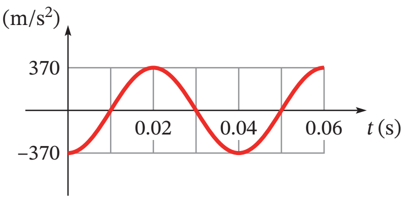
10.4 1.3×10^8 Pa.

10.5 $-\frac{\Delta P}{B} = -\frac{1.0\times10^7 \text{ Pa}}{2.3\times10^9 \text{ Pa}} = -0.0043 = \frac{\Delta V}{V}$
e $\Delta V = -0.43\% \times V$.

10.6 110 m/s^2 in $x = \pm A$.

10.7 $K = 0$, $U_e = 2(mg)^2/k$, $U_g = -(mg)^2/k$, $E = (mg)^2/k$.

10.8



10.9 1.6 m/s^2 (circa 1/6 che sulla Terra).

10.10 0.82 m/s.

Risposte ai quesiti Mettiti alla prova

10.2 I due fili sono sottoposti allo stesso sforzo (stessa forza di trazione e stessa area della sezione trasversale). Il modulo di Young per l'acciaio è $\frac{5}{3}$ di quello del rame, quindi la *deformazione* per il filo di acciaio ammonta ai $\frac{3}{5}$ della deformazione del filo di rame. Tuttavia, la deformazione è la variazione *frazionaria* della lunghezza. Il filo di acciaio è lungo il doppio, quindi la variazione della sua lunghezza si ottiene moltiplicando la variazione della lunghezza del filo di rame per il fattore $2\times(3/5)$. Il filo di acciaio si allunga di più.

10.3 (a) Il modulo di Young è la costante di proporzionalità tra lo sforzo e la deformazione: sforzo $= Y \times$ deformazione. Pertanto, Y è la pendenza della parte lineare del grafico dello sforzo in funzione della deformazione. Il materiale A mostra una pendenza maggiore, quindi il suo modulo di Young è maggiore di quello del materiale B. (b) Il limite di resistenza è il massimo sforzo che il materiale può sopportare. Il grafico per il materiale B raggiunge uno sforzo maggiore, quindi possiede un maggiore limite di resistenza.

10.5 Quando le energie cinetica e potenziale sono uguali, ciascuna ammonta alla metà dell'energia totale. Si ha pertanto:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}E_{\text{totale}} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}kA^2\right)$$

da cui si ricava $x = \pm A/\sqrt{2}$.

10.6 0,50 Hz.

10.7 (a) Quando la posizione è zero, l'energia potenziale ha il suo valore minimo. In base al principio di conservazione dell'energia, l'energia cinetica ha quindi il suo valore massimo. Pertanto, la velocità raggiune il suo valore massimo ($v_x = \pm v_m$), come mostrato in Figura 10.21. (b) Quando la velocità è zero, l'energia cinetica è minima e l'energia potenziale è massima. Perciò, la posizione raggiune il suo massimo valore assoluto ($x = \pm A$).

10.8 Sì. Per un pendolo semplice costituito da una massa m posta all'estremità di un filo inestinsibile di lunghezza L, il momento di inerzia attorno al perno è $I = mL^2$. Si ha pertanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

in accordo con l'Equazione (10-28b).