CAPÍTULO 1

Elementos básicos de la Geometría

1.1 Rectas y ángulos

En Geometría hay ideas básicas que todos entendemos pero que no definimos. Éstas son las ideas de Punto, Recta, Plano y Espacio.

Señalamos un **punto** con una marca que puede ser "·" o "×" y la ubicamos en un marco de referencia, generalmente en el Sistema Cartesiano.

Un punto se caracteriza y se diferencia de otro punto sólo por su ubicación. Si está en un plano, su posición se indica por un par ordenado de números reales $P(x, y)$ (Figura 1). Si está en el espacio, se indica con un trío ordenado de números reales $P(x, y, z)$ (Figura 2).

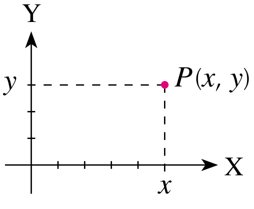


Figura 1

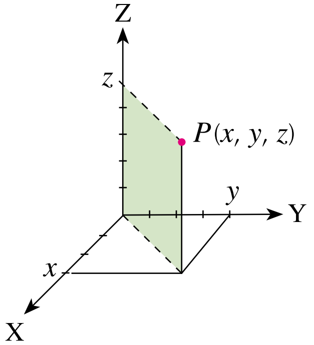
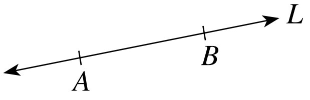


Figura 2

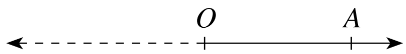
Señalamos una **recta** por una parte de ella, considerando siempre que la recta es ilimitada.



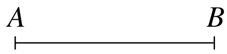
La nombramos con una letra (L) o marcando dos puntos cualesquiera de ella $\overleftrightarrow{AB}$.

Cada punto de una recta divide a ésta en dos **semirrectas**. El punto es la **frontera** entre ambas y no pertenece a ninguna de ellas.

Se llama **rayo** a una semirrecta unida con su frontera $\overrightarrow{OA}$.



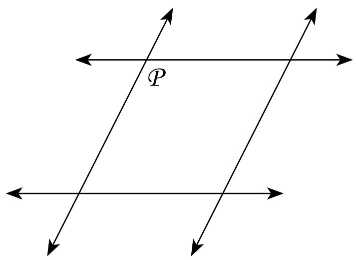
Se llama **segmento** o **trazo** a una porción continua de recta limitada por ambos lados.



$\overline{AB}$ segmento o trazo

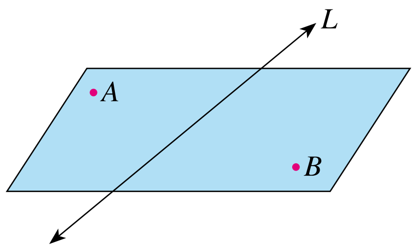
La medida o longitud de $\overline{AB}$ se designa por $m(\overline{AB})$ o simplemente AB.

Señalamos un **plano** por una porción de él y generalmente le damos la forma de paralelogramo. No debemos olvidar que el plano es ilimitado. Normalmente lo designamos por una letra $\mathcal{P}$.



$\mathcal{P}$: plano

Una recta en un plano divide a éste en dos **semiplanos**, siendo la recta la **frontera** entre los dos semiplanos.



Semiplano A

Semiplano B

L recta frontera

Ambos semiplanos y la recta frontera constituyen una partición del plano.

En el plano encontramos diversas **figuras geométricas** que se caracterizan por su forma. Si son líneas abiertas constituidas por segmentos unidos por sus extremos, se llaman **poligonales**; **curvas** si no contienen segmentos, y **mixtas** si están formadas por segmentos y porciones de curvas. Si las líneas son cerradas, dividen al plano que las contiene en tres partes: su interior, su exterior y la frontera. Las líneas cerradas encierran una región, y su **área** es la medida de la parte del plano que constituye el interior de la figura. Quedan limitadas por su contorno o frontera, cuya medida de longitud se denomina **perímetro**.

A lo largo de gran parte de este libro proponemos ejercicios que tienen que ver con distintas figuras geométricas, sus elementos constitutivos, sus elementos secundarios, su perímetro y su área, así como la relación entre las medidas de sus elementos y la forma de construirlas.

Espacio es el ambiente tridimensional en que nos movemos. Propondremos, estudiaremos y resolveremos problemas relativos a cuerpos geométricos. Entendemos por **cuerpo geométrico** una porción continua del espacio limitada por superficies curvas y/o planas. Si sólo está limitado por planos, se llama **poliedro**. Si su límite tiene alguna parte que es una superficie curva, se llama **cuerpo redondo**.

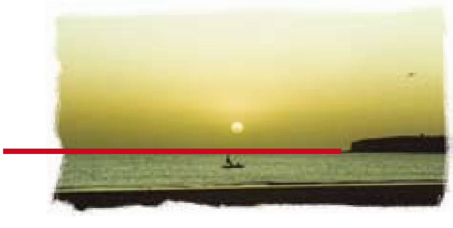
La medida de esa porción limitada de espacio que constituye un cuerpo es lo que llamamos **volumen** del cuerpo.

Las porciones de planos que limitan el cuerpo se llaman **caras** y si son porciones de superficies curvas, se denominan **manto** o **superficie de revolución**. La suma de las áreas de las caras y/o de las superficies de revolución constituye el área del cuerpo geométrico.

Un plano divide al espacio en dos semiespacios, siendo el plano la frontera entre ambos; no pertenece a ninguno de ellos. Ambos semiespacios y el plano divisorio constituyen una partición del espacio.

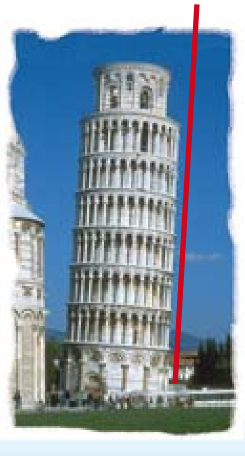
En esta primera parte del texto nos remitiremos solamente a trabajar con figuras geométricas en el plano. En el capítulo 9 veremos algunos problemas de geometría del espacio que tienen que ver con cuerpos geométricos.

1.2 Puntos y rectas en el plano



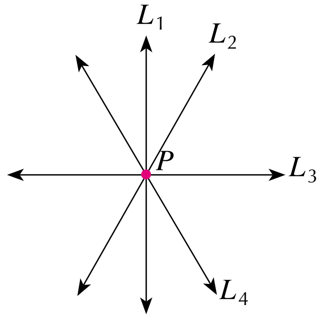
Una recta es **horizontal** si sigue la dirección, por ejemplo, de las aguas en reposo.

Una recta es **vertical** si sigue la dirección, por ejemplo, de un edificio o de una plomada.



Cualquier recta que no sea horizontal o vertical se llama recta **oblicua**.

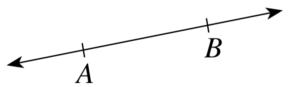
- Por un punto se pueden trazar infinitas rectas coplanares (que están en el mismo plano).



$\{P\} = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4$

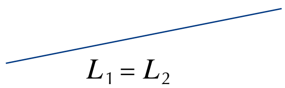
P se llama punto de concurrencia de las rectas L_1 , L_2, L_3 y L_4.

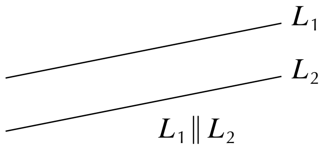
- Dos puntos definen una única recta.



$\overleftrightarrow{AB}$: recta que contiene a los puntos A y B.

Dos rectas de un plano se llaman paralelas si coinciden en todos sus puntos o si su intersección es vacía.

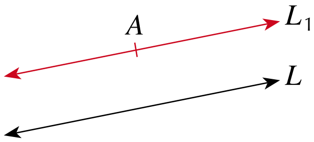




El símbolo que usamos para paralelismo es " $\parallel$ ".

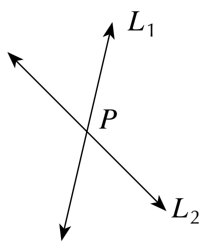
$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \varnothing \\ L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2 \end{cases}$$

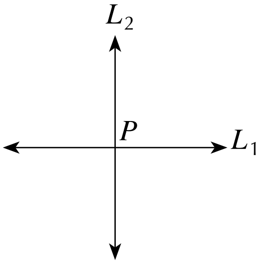
- Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola recta paralela a ella.



$L_1 \parallel L$, L_1 contiene a A

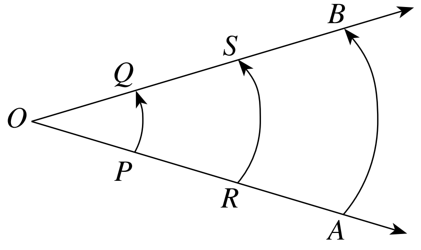
Dos rectas que se intersectan se llaman **secantes**.





1.3 Ángulos

Se llama **ángulo** a la unión de dos rayos que tienen origen común. El origen recibe el nombre de **vértice** y la abertura que se produce entre los rayos es lo que llamamos **medida del ángulo**. Los rayos se llaman **lados** del ángulo.



$\measuredangle AOB$: ángulo AOB

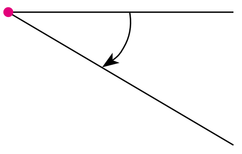
También podemos entender la medida del ángulo como la parte del plano que recorre el rayo $\overrightarrow{OA}$ para llegar a la posición $\overrightarrow{OB}$, manteniendo fijo el punto O. Considerando que el punto A puede ser elegido en cualquier parte del rayo $\overrightarrow{OA}$ (lado del ángulo), $\measuredangle ROS$, $\measuredangle POQ$ y cualquier otra elección representan el mismo ángulo.

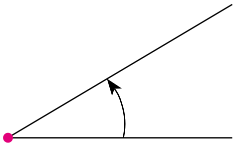
Convengamos en que, en la figura anterior, $OA = OB$; $OR = OS$; $OP = OQ$. Diremos entonces que $\overparen{AB}$ es un **arco** con **radio** OA, $\overparen{RS}$ es un **arco** con **radio** OR y $\overparen{PQ}$ es un **arco** con **radio** OP.

Medida de ángulos:

La medida de un ángulo se considera positiva si la abertura se recorre en sentido inverso al movimiento que realizan las manecillas del reloj, y se considera negativa si la abertura se recorre en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

ángulo de medida negativa

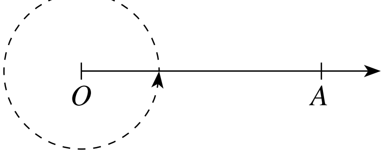




ángulo de medida positiva

Dos ángulos son iguales si el valor absoluto de sus medidas es igual.

Si el rayo $\overrightarrow{OA}$ da una vuelta completa en torno a su vértice O, decimos que se ha descrito un **ángulo completo**.



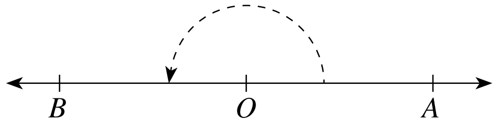
Consideraremos aquí dos sistemas de medida de ángulos:

Sistema sexagesimal: la unidad de medida es 1 grado (1°) y éste se define como un 360$^{\text{avo}}$ del ángulo completo. Un grado contiene 60 minutos y un minuto contiene 60 segundos.

Sistema de radianes: la unidad de medida es 1 radián (1 rad) y se define como la parte del ángulo completo cuyo arco es igual al radio.

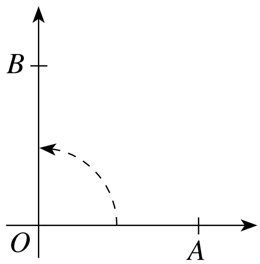
El ángulo completo mide entonces 360° ó 2π rad.

Se llama **ángulo extendido** a la mitad del ángulo completo. Mide 180° ó π rad.



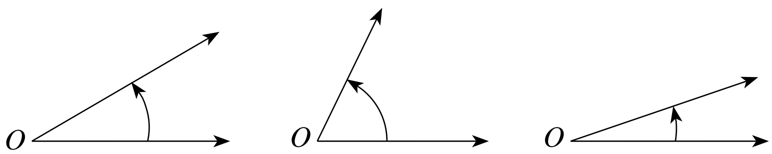
∢*AOB*: ángulo extendido

Se llama **ángulo recto** a la mitad del ángulo extendido. Mide 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad.

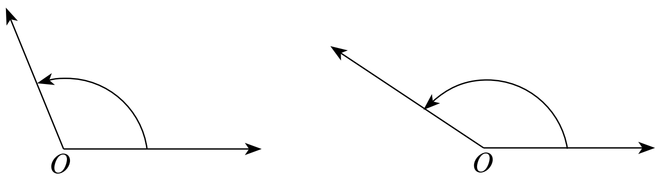


∢*AOB*: ángulo recto

Los ángulos menores que 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad se llaman **ángulos agudos**.



Los ángulos mayores que 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad y menores que 180° ó π rad se llaman **ángulos obtusos**.



Si un ángulo mide más de 360° ó 2π rad se considera equivalente al mayor ángulo menor que 360° ó 2π rad luego de haberle restado $n \cdot 360°$ ó $n \cdot 2\pi$, con $n \in \mathbb{N}$.

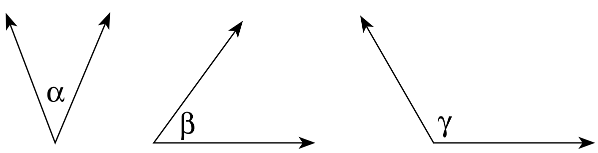
Por ejemplo:

560° es equivalente con 560° – 360° = 200°

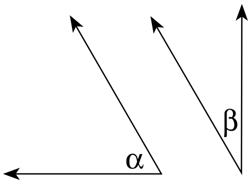
1.153° es equivalente con 1.153° – 3 · 360° = 1.153° – 1.080° = 73°

7π es equivalente con 7π – 3 · 2π = 7π – 6π = π

Los ángulos se pueden nombrar también usando letras griegas, como α, β, γ, δ, ε, ϕ, etc. Se ubican en su interior y representan su medida.

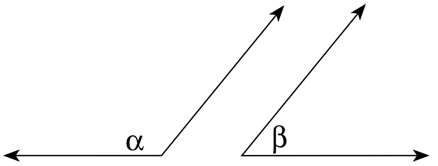


Dos ángulos tales que la suma de sus medidas es 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad se llaman **ángulos complementarios**. Si α y β son ángulos complementarios, entonces α es el complemento de β y β es el complemento de α.



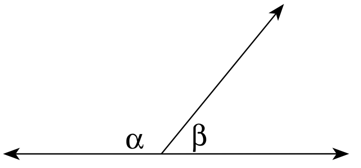
$\alpha + \beta = 90°$

Dos ángulos tales que la suma de sus medidas es 180° ó π rad se llaman **ángulos suplementarios**. Si α y β son ángulos suplementarios, entonces α es el suplemento de β y β es el suplemento de α.

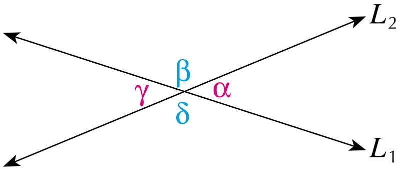


$\alpha + \beta = 180°$

Si α y β son dos ángulos tales que un lado de α coincide con un lado de β y la suma de sus medidas es 180° ó π rad, entonces α y β se llaman ángulos **adyacentes suplementarios** y se dice que forman un **par lineal** de ángulos.



Dos rectas secantes forman cuatro ángulos.

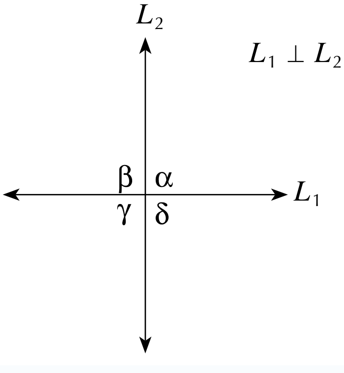


El par α y γ se llaman ángulos **opuestos por el vértice** y tienen la misma medida.

El par, β y δ se llaman ángulos **opuestos por el vértice** y tienen la misma medida.

Cualquier ángulo de la primera pareja es suplemento de cualquier ángulo de la segunda pareja.

Una pareja es de ángulos agudos (α y γ) y la otra es de ángulos obtusos (β y δ); a menos que los cuatro ángulos que se forman sean iguales, en cuyo caso cada uno mide 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad y las rectas se llaman **perpendiculares**. Se usa el símbolo "$\perp$".



$L_1 \perp L_2$

En geometría se llaman **postulados** o **axiomas** a aquellas verdades que por ser evidentes se aceptan como tales. No necesitan ser demostradas.

Sobre la base de los postulados y utilizando las definiciones que se han dado, hay otras verdades que no son tan evidentes y por lo tanto deben ser demostradas. Éstas son las que llamamos **teoremas.** El enunciado de un teorema consta de dos partes: una, llamada **hipótesis**, que contiene los datos, y la otra, llamada **tesis**, que es la verdad que se quiere demostrar. El razonamiento o deducción lógica que se hace para concluir la tesis utilizando la hipótesis se llama **demostración**.

Existen también los **lemas**, que son teoremas de menor importancia, cuyo único objeto es facilitar la demostración de otro teorema más importante.

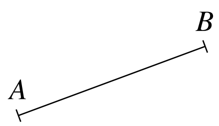
Se llama **corolario** a toda consecuencia directa de un teorema que se deduce por un razonamiento simple.

Un teorema se llama **teorema recíproco** de otro cuando la tesis del primero pasa a ser la hipótesis del segundo y la hipótesis del primero se convierte en la tesis del segundo.

Postulados o axiomas:

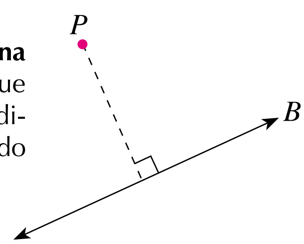
1. Por dos puntos se puede trazar una única recta.
2. Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.
3. Por un punto de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.
4. Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola paralela a ella.
5. Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.
6. Dos rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.

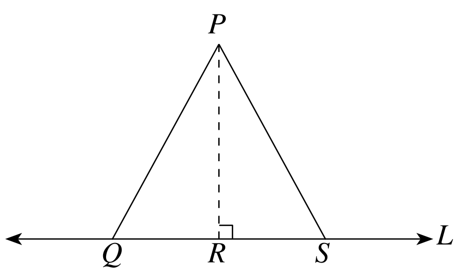
Definiciones:



1. Se llama **distancia entre dos puntos** a la medida del segmento que los une.

2. Se llama **distancia de un punto a una recta** a la medida del segmento que se inicia en el punto y llega perpendicularmente a la recta (por postulado anterior hay uno solo).

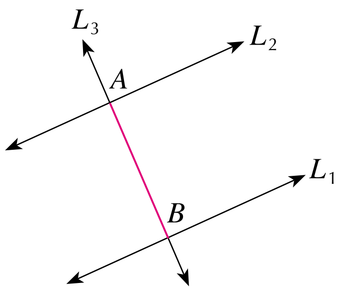




3. Todo segmento trazado desde un punto P a una recta L que no es perpendicular a la recta se llama **segmento oblicuo.**
   $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ son segmentos oblicuos.
   Los puntos Q, R y S se denominan **pie** de los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$, respectivamente.

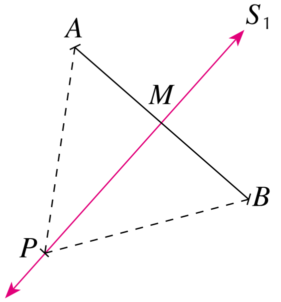
Dos segmentos oblicuos cuyos respectivos pies están a igual distancia del pie de la perpendicular tienen longitudes iguales.
Si el pie de un segmento oblicuo está a mayor distancia del pie de la perpendicular que otro, es más largo que ese otro.
La perpendicular a la recta es bisectriz del ángulo formado por dos segmentos oblicuos de igual medida (Ver definición 6).

4. Se llama **distancia entre dos rectas paralelas** a la medida del segmento determinado por las rectas en una perpendicular a ambas.



$L_1 \parallel L_2$
AB = distancia entre L_1 y L_2
$L_3 \perp L_1$ y $L_3 \perp L_2$

5. Se llama **simetral de un segmento** a la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

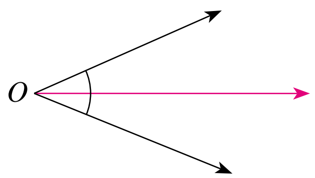


$\overline{AB}$: Segmento
M: Punto medio de $\overline{AB}$
S_1: Simetral de $\overline{AB}$
$S_1 \perp \overline{AB}$

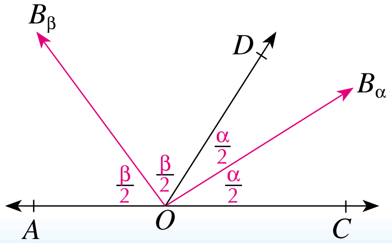
Todos los puntos de la simetral de un segmento equidistan de los extremos del segmento:

$$PA = PB;\ MA = MB.$$

6. Se llama **bisectriz de un ángulo** al rayo que divide al ángulo en dos partes de igual medida, es decir, lo bisecta.

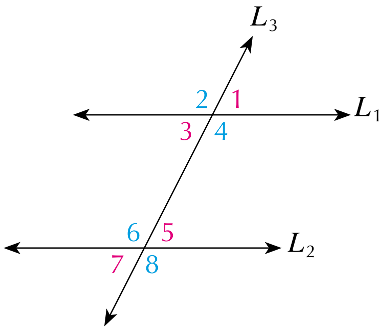


Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.



B_α: bisectriz de $\measuredangle COD$ de medida α
B_β: bisectriz de $\measuredangle DOA$ de medida β
$B_\alpha \perp B_\beta$

7. Dos rectas paralelas cortadas por una secante (o transversal) generan dos grupos de ángulos.



$L_1 \parallel L_2$
L_3: secante

Las parejas $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 5$, $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 6$,
$\measuredangle 3$ y $\measuredangle 7$, $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 8$

se llaman **ángulos correspondientes** y tienen igual medida.

Las parejas $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 6$
$\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$

se llaman **ángulos alternos internos** y tienen igual medida.

Las parejas $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 7$
$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 8$

se llaman **ángulos alternos externos** y tienen igual medida.

Teoremas:

1. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes tienen medidas iguales.

2. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos tienen medidas iguales.

3. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos tienen medidas iguales.

   Nota: en cada uno de los tres teoremas anteriores están enunciados un teorema y su recíproco. Por ejemplo, en el Teorema 1 podemos decir: **rectas paralelas cortadas por una transversal generan ángulos correspondientes de igual medida** (la hipótesis es que se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal y la tesis es que los ángulos correspondientes tienen medidas iguales). Y el teorema recíproco es: **En dos rectas cortadas por una transversal, si los ángulos correspondientes tienen medidas iguales, entonces las rectas son paralelas** (la hipótesis es que los ángulos correspondientes tienen medidas iguales y la tesis es que las rectas son paralelas). Cada vez que un enunciado contiene un **si y sólo si**, cuya simbología es "$\Leftrightarrow$", hay dos teoremas involucrados y uno es recíproco del otro.
   Observando la figura anterior, el Teorema 1 queda:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m\measuredangle 1 = m\measuredangle 5$$

4. Dos ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales.

Ejercicios resueltos

1. Si $\alpha = 20° \, 3' \, 52''$, hallar su complemento.

El complemento de un ángulo es lo que le falta a éste para completar 90°; por lo tanto, el complemento de α es: (90° – α).

$$\begin{array}{r} 90° \\ -\ 20° \, 3' \, 52'' \\ \hline \end{array}$$

Para realizar la resta tomamos 1° de los 90° y lo expresamos como 59′ 60″, así nos queda:

$$\begin{array}{rrrr} & 89° & 59' & 60'' \\ - & 20° & 3' & 52'' \\ \hline & 69° & 56' & 8'' \end{array}$$

El complemento de α es el ángulo que mide 69° 56′ 8″.

2. Hallar el suplemento del complemento de α, si α = 32°.

El complemento de α es (90° – α) = 90° – 32° = 58°
El suplemento de 58° es (180° – 58°) = 122°
Luego el suplemento del complemento de α es 122°

3. Expresar la medida de un ángulo de 35° en radianes.

Sabemos que 180° corresponden a π rad. La pregunta es: ¿a cuántos radianes equivalen 35°? Se establece una proporción directa:

$$\frac{180^o}{35^o} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{35^o \cdot \pi}{180^o} = \frac{7\pi}{36} \approx 0{,}61 \text{ rad}$$

El ángulo de 35° expresado en radianes es de aproximadamente 0,61 rad.

4. Expresar la medida de un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad en grados.

Sabemos que el ángulo de π rad equivale a 180°. La pregunta es: ¿a cuántos grados corresponden los $\frac{2\pi}{3}$ rad? Se forma la proporción directa correspondiente:

$$\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{180^o}{x^o} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 180^o}{3\pi} = 120^o$$

El ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad expresado en grados es 120°.

5. Sea α = 102° 20′ 32″ y β = 53° 14′ 7″.
Hallar el valor de 4β – 2α

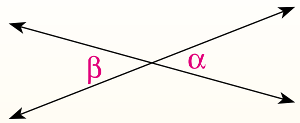
4β = 4 • (53° 14′ 7″) = 212° 56′ 28″
2α = 2 • (102° 20′ 32″) = 204° 40′ 64″ = 204° 41′ 4″
4β – 2α = 212° 56′ 28″ – 204° 41′ 4″ = 8° 15′ 24″
Luego, el valor de 4β – 2α es 8° 15′ 24″.

6. Indicar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis en el siguiente teorema: “Dos ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales”.

Hipótesis:
Dos ángulos son opuestos por el vértice.

Tesis:
Esos dos ángulos tienen medidas iguales.

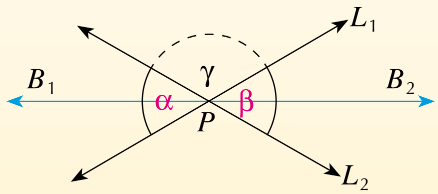
Para realizar una demostración en geometría, frecuentemente se dibuja una figura; luego, la hipótesis y la tesis se escriben en símbolos de acuerdo con la figura:



Hipótesis:
α y β son las medidas de dos ángulos opuestos por el vértice.

Tesis: $\alpha = \beta$

7. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirrectas opuestas, es decir, son partes de una misma recta.



Hipótesis:
$\alpha = \beta$ son ángulos opuestos por el vértice, formados por las rectas L_1 y L_2.

$\overrightarrow{PB_1}$ bisectriz de α

$\overrightarrow{PB_2}$ bisectriz de β

Tesis:

$\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ son semirrectas opuestas.

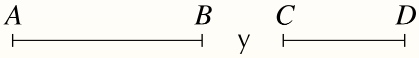
Demostración:

1. El ángulo γ es el suplemento de α y de β (forman pares lineales)
2. Luego: $$\begin{array}{r} \alpha + \gamma = 180° \\ \beta + \gamma = 180° \\ \hline \end{array}$$
3. Sumando: $\alpha + \beta + 2\gamma = 360°$
4. Las rectas L_1 y $\overrightarrow{PB_1}$ se intersectan en P, formando el ángulo de medida $\frac{\alpha}{2}$.
5. Las rectas L_2 y $\overrightarrow{PB_2}$ se intersectan en P, formando el ángulo de medida $\frac{\beta}{2}$.
6. Dividiendo por 2 en el paso 3:
   $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 180°$
7. Por lo tanto, $\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ forman un ángulo extendido.
8. Luego, $\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ son semirrectas opuestas.

8. Dados dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, construir segmentos que midan:

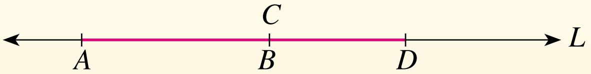
a) $AB + DC$ b) $AB - CD$ c) $2AB$ d) $\dfrac{AB}{2}$

Sean los segmentos:



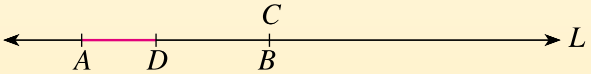
a) Construcción del segmento de medida $AB + DC$ (suma de segmentos).

1. Se dibuja la recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. $\odot(A, AB)$ se copia $\overline{AB}$ sobre L.
4. $\odot(B, CD)$ se copia $\overline{CD}$ sobre L a continuación de $\overline{AB}$.
5. $AD = AB + CD$.



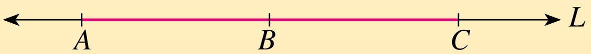
b) Construcción del segmento de medida $AB - CD$, con $AB > CD$

1. Se dibuja la recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. $\odot(A, AB)$ determina B sobre L ($\overline{AB}$ copiado).
4. $\odot(B, CD)$ determina D sobre L, pero en sentido contrario al usado para copiar $\overline{AB}$.
5. $AB - CD = AD$.



c) Construcción del segmento de medida $2AB$.

1. Se dibuja una recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. Se copia $\overline{AB}$ dos veces, una a continuación de la otra, determinando C.
4. $AC = 2AB$.

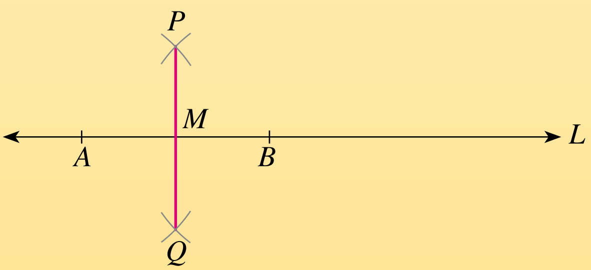


d) Construcción del segmento de medida $\dfrac{AB}{2}$ (bisectar un segmento)

1. Se dibuja una recta L.
2. Se copia el segmento $\overline{AB}$ en L.
3. $\odot(A, r) \cap \odot(B, r) = \{P, Q\}$.

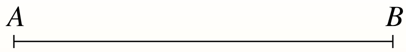
   $\left(r = \text{cualquier radio mayor que } \dfrac{AB}{2}\right)$.

4. $\overleftrightarrow{PQ} \cap AB = \{M\}$ (M es punto medio)
5. $AM = MB$.

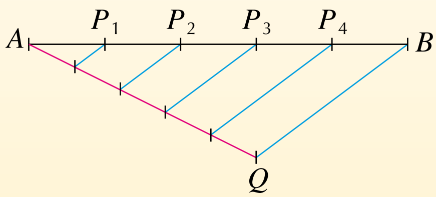


9. Dividir un segmento dado $\overline{AB}$ en n partes de igual medida.

Consideraremos $n = 5$. Sea $\overline{AB}$ el segmento que se desea dividir.



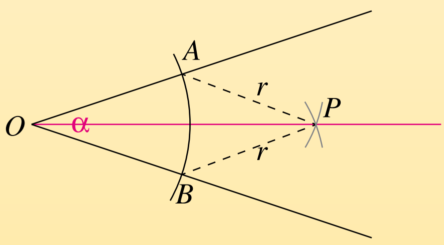
1. Se copia $\overline{AB}$.
2. Desde el extremo A, con cualquier ángulo, se traza un segmento $\overline{AQ}$ señalando en él 5 unidades cualesquiera.
3. Se une el extremo Q de $\overline{AQ}$ con el punto B (extremo libre del segmento $\overline{AB}$).
4. Se trazan paralelas a $\overline{BQ}$ por cada uno de los puntos que indican las unidades señaladas en $\overline{AQ}$.
5. P_1, P_2, P_3, P_4 son las intersecciones de cada paralela con $\overline{AB}$ y marcan los puntos de división del segmento $\overline{AB}$ en cinco partes de igual medida.



10. Construir la bisectriz de un ángulo dado.

Sea O el vértice del ángulo dado α.

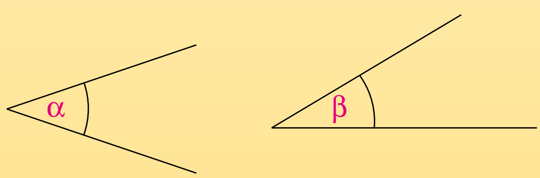
1. Desde el punto O, con radio r (cualquiera) se describe un arco de circunferencia, determinando los puntos A y B sobre los lados del ángulo.
2. Desde el punto A, con radio r, se describe un arco de circunferencia.
3. Desde el punto B, con el mismo radio r, se describe un arco de circunferencia que intersecte al anterior.
4. $\odot(A, r) \cap \odot(B, r) = \{P\}$.
5. $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz pedida.



11. Sean α y β dos ángulos dados con $\alpha > \beta$. Construir ángulos de medida:

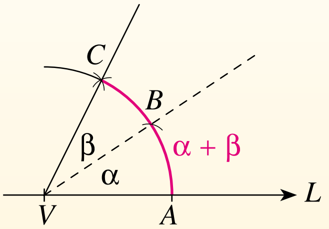
a) $\alpha + \beta$ b) 2α c) $\alpha - \beta$ d) $\frac{\alpha}{2}$ (bisectriz de un ángulo)

Sean los ángulos:



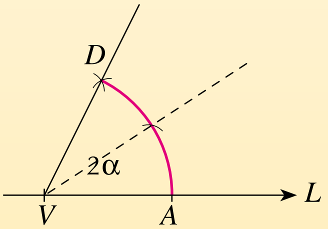
a) Construcción de $\alpha + \beta$ (Suma de ángulos).

1. Se marcan arcos en ambos ángulos con el mismo radio r.
2. Se dibuja una recta L.
3. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
4. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$.
5. Desde A se copia α, determinando B.
6. Desde B y a continuación se copia β, determinando C.
7. $\sphericalangle CVA = \alpha + \beta$.



b) Construcción de 2α (Duplicación de un ángulo).

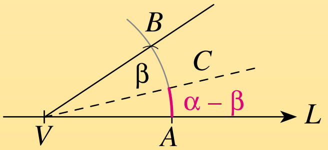
1. Se dibuja una recta L.
2. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
3. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$.
4. Desde A se copia 2 veces α sobre la circunferencia, determinando D.
5. $\sphericalangle AVD = 2\alpha$.



(en la misma forma se continúa para obtener 3α, 4α, 5α, etc.)

c) Construcción de $\alpha - \beta$ (Diferencia de ángulos).

1. Se marcan arcos en α y en β con el mismo radio r.
2. Se dibuja una recta L.
3. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
4. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$.
5. Desde A se copia α, determinando B.
6. Desde B y en sentido contrario se copia β, determinando C.
7. $\sphericalangle CVA = \alpha - \beta$.



d) Construcción de $\frac{\alpha}{2}$ (bisectriz de un ángulo). Ver ejercicio 10.

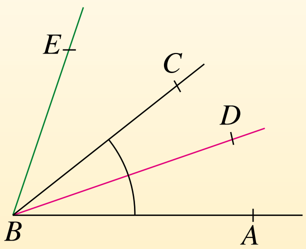
12. Sean ABC un ángulo y $\overrightarrow{BD}$ su bisectriz. Sea $\overrightarrow{BE}$ una semirrecta en el exterior del $\measuredangle ABC$. Probar que: $2\measuredangle DBE = \measuredangle EBC + \measuredangle EBA$.

$$\measuredangle EBA = \measuredangle EBD + \measuredangle DBA$$
$$\measuredangle EBC = \measuredangle EBD - \measuredangle CBD$$

Sumando: $\measuredangle EBA + \measuredangle EBC = 2\measuredangle DBE + \measuredangle DBA - \measuredangle CBD$

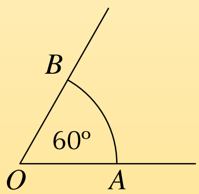
como $\measuredangle DBA = \measuredangle CBD$ (BD bisectriz)

se tiene: $\measuredangle EBA + \measuredangle EBC = 2\measuredangle DBE$



13. Construir un ángulo de 60°.

1. Se traza una semirrecta $\overrightarrow{OA}$.
2. Se describe $\odot(O, OA)$.
3. $\odot(O, OA) \cap \odot(A, OA) = \{B\}$.
4. $\measuredangle AOB = 60°$



$\triangle AOB$ es equilátero: $OA = OB = r$ y $AB = r$, por construcción.

Ejercicios

1. Efectuar las siguientes operaciones:

a) 23° 12′ 53″ + 17° 39′ 12″
b) 120° 3″ – 32° 16′ 15″
c) 12° 9′ 45″ + 35° 55′ 17″
d) 55° 26′ 15″ – 17° 17″
e) 118° 16′ 54″ + 2(6° 12′ 43″)
f) 180° – 145° 12′ 15″
g) 90° – 45° 23′ 44″
h) 180° – 15′ 12″
i) 90° – 26° 6″
j) 90° – 32°15′

2. Si $\alpha = 20° 30' 16''$ y $\beta = 53° 53' 15''$, hallar:

a) $\alpha + 2\beta$
b) $\beta - \alpha$
c) 2α
d) $3\alpha - \beta$
e) $5\beta - 3\alpha$

3. Hallar el complemento y el suplemento de los siguientes ángulos:

a) $85° 12' 6''$ g) $\frac{\pi}{3}$ m) 2π

b) $32° 25' 14''$ h) $\frac{\pi}{6}$ n) $\frac{9\pi}{10}$

c) $125°$ i) $\frac{\pi}{4}$ o) 3,5 rad

d) $48° 14'$ j) $\frac{\pi}{18}$ p) 2 rad

e) $12° 6''$ k) $\frac{2\pi}{3}$ q) 0,3 rad

f) $73° 2' 53''$ l) $\frac{5\pi}{6}$ r) $\frac{3}{4}$ rad

4. Hallar el doble, el triple y la mitad de cada uno de los siguientes ángulos:

a) $16° 25' 12''$ d) π

b) $3° 5' 3''$ e) $\frac{2\pi}{3}$

c) $144° 12' 5''$ f) $\frac{\pi}{4}$

5. Expresar los siguientes ángulos como grados y fracción de grados:

a) $25° 12'$ d) $17° 32' 15''$

b) $132° 53'$ e) $24° 12' 12''$

c) $15° 30'$ f) $5° 1' 1''$

6. Expresar los siguientes ángulos en términos de grados, minutos y segundos:

a) $25{,}5°$ d) $15{,}9°$

b) $143{,}36°$ e) $95{,}3°$

c) $14{,}124°$ f) $27{,}03°$

7. Expresar los siguientes ángulos en radianes:

a) $30°$ f) $40° 25' 15''$

b) $120°$ g) $15° 3' 6''$

c) $270°$ h) $44{,}6°$

d) $45°$ i) $120{,}5°$

e) $60°$ j) $135°$

8. Expresar los siguientes ángulos en grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{8}$ i) $\frac{7\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{3\pi}{4}$ j) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{6}$ g) $\frac{5\pi}{3}$ k) 3,2 rad

d) $\frac{\pi}{4}$ h) 2π l) 2,5 rad

9. En las siguientes proposiciones, indicar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

a) Si un número termina en cero, entonces es divisible por 10.

b) Si un número es divisible por 10, entonces termina en cero.

c) Dos ángulos de la misma naturaleza (ambos agudos o ambos obtusos) con sus lados respectivamente perpendiculares tienen medidas iguales.

d) Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.

e) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

f) Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos tienen medidas iguales.

g) Si dos rectas al ser intersectadas por una transversal producen ángulos alternos internos de igual medida, las rectas son paralelas.

h) Dados dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, si tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios.

i) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

j) Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal, las bisectrices de dos ángulos internos del mismo lado de la transversal se intersectan formando un ángulo recto.

k) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.

l) Si desde un punto fuera de una recta se trazan oblicuas a la recta cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular trazada desde el mismo punto, las oblicuas forman ángulos de igual medida con la perpendicular.

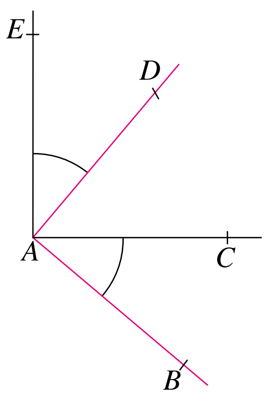
10. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

11. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes complementarios forman un ángulo de 45°.

12. Sean α y β las medidas de dos ángulos adyacentes. Demostrar que el ángulo formado por sus bisectrices mide $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

13. En la figura $\overline{EA} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DA} \perp \overline{AB}$.

Demostrar que $m(\sphericalangle EAD) = m(\sphericalangle CAB)$.



14. Sean $\overline{AB}$ un segmento y M su punto medio; si P está en la prolongación de $\overline{AB}$, probar que $MP = \frac{PA + PB}{2}$.

15. Si M es punto medio del segmento $\overline{AB}$ y P es un punto del interior de $\overline{AB}$, probar que:

$$MP = \frac{|PA - PB|}{2}$$

16. Sean $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ y $\overline{PB}$ segmentos consecutivos de una misma recta tales que $AM = x$, $MN = 2x$, $NP = PB = x + 1$ y $AB = 17$. Hallar la medida de cada uno.

17. Dado un segmento $AB = 50$ cm. Desde sus extremos se marcan P y Q en $\overline{AB}$ tales que $AP = BQ = 2QR$. Siendo R un punto entre P y Q tal que $PR = AP + 1$, hallar la medida de todos los segmentos.

18. Sean $\overline{PQ}$ un segmento y R un punto interior tal que $PQ = 5PR$ y $RQ = 20$ cm. Hallar la medida de $\overline{PQ}$.

19. Sean $\overline{AB}$ un segmento y P un punto fuera de él, en la misma recta, tal que $AB = 3BP + 1$. Si $AP = a$, ¿cuánto mide AB?

20. Sean α y β ángulos adyacentes suplementarios tales que $\beta = 3\alpha$. Hallar la medida de cada uno.

21. Sean α, β y γ ángulos adyacentes tales que forman un ángulo extendido. Si $\beta = 3\alpha$ y $\gamma = 2\beta$, hallar la medida de cada uno.

22. Sean α, β, γ y δ ángulos adyacentes tales que su suma es $\frac{3\pi}{2}$. Si $\alpha = 3\beta$ y $\gamma + \delta = 3\alpha$, ¿qué se puede decir de la medida de cada uno de los ángulos?

23. Sean ABC un ángulo, $\overrightarrow{BD}$ su bisectriz y $\overrightarrow{BE}$ una semirrecta interior del $\measuredangle ABC$. Probar que $2m(\measuredangle DBE) = m(\measuredangle EBC) - m(\measuredangle EBA)$.

24. Sean ABC un ángulo y $\overline{BD}$ su bisectriz. Si $\overline{PQ} \perp \overline{BD}$ en B, quedando B entre P y Q, probar que:
$m(\measuredangle PBC) = m(\measuredangle QBA)$

25. Construir una perpendicular a una recta en un punto dado de la recta.

26. Construir una perpendicular a una recta dada desde un punto fuera de ella.

27. Construir una paralela a una recta por un punto dado fuera de ella.

28. Construir un ángulo de 45°.

29. Construir un ángulo de 135°.

30. Construir un ángulo de 30°.

31. Trisectar el ángulo de 90°.

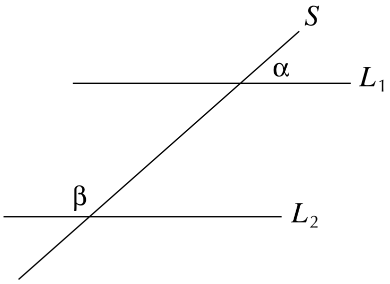
32. Construir un ángulo de 120°.

33. Construir un ángulo de 15°.

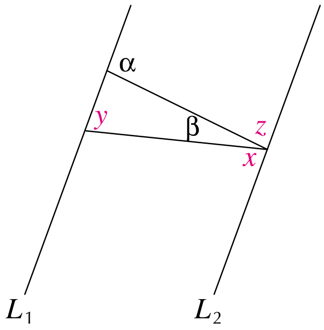
34. Construir un ángulo de 75°.

35. Construir un ángulo de 127,5°.

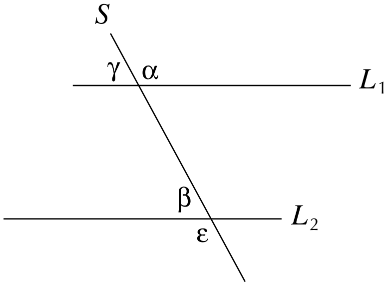
36. En la figura siguiente, $L_1 \parallel L_2$, S secante. Hallar el valor de x y la medida de los ángulos α y β, sabiendo que $\alpha = 2x + 5$ y $\beta = 3x$.



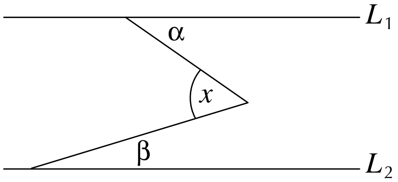
37. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $\alpha = 96°$ y $\beta = 20°$. Hallar la medida de los ángulos x, y y z.



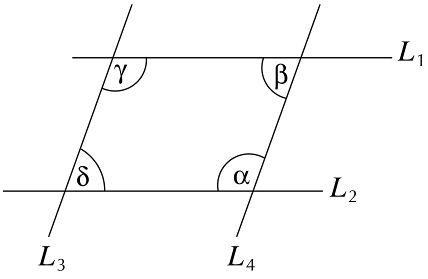
38. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, S secante. Si $\alpha = 2x + 35°$ y $\beta = x + 25°$, hallar la medida de α, β, γ y ε.



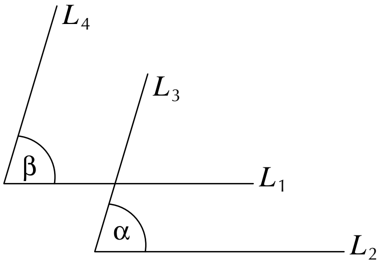
39. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 16°$. Hallar la medida del ángulo x.



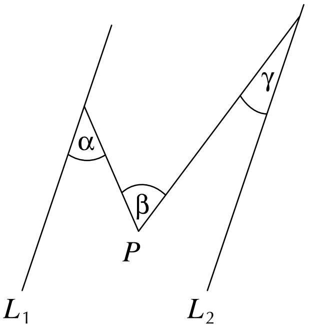
40. En la figura, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Si $\alpha = 110°$, hallar las medidas de β, γ, y δ.



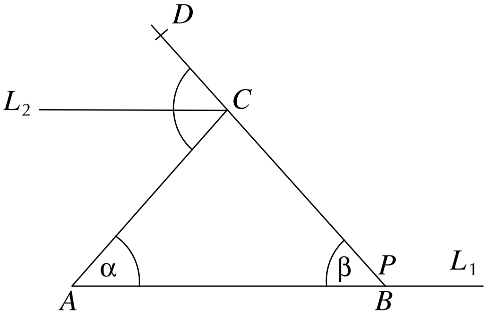
41. En la figura, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Probar que $\alpha = \beta$.



42. En la figura, $\alpha = 42°$, $\beta = 60°$ y $\gamma = 18°$. Probar que $L_1 \parallel L_2$.
(Sugerencia: Trazar por P una recta paralela a L_1).

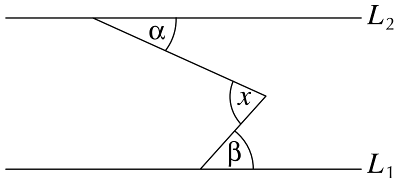


43. En la figura, $\alpha = \beta$ y $L_1 \parallel L_2$. Probar que L_2 es bisectriz del $\sphericalangle DCA$.



44. En la misma figura anterior, con $\alpha = \beta$ y $\sphericalangle DCA = \alpha + \beta$. Si L_2 es bisectriz del $\sphericalangle DCA$, probar que $L_1 \parallel L_2$.

45. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Probar que x es igual a la suma de $\alpha + \beta$.



46. Sean ABC un ángulo agudo y P un punto de su bisectriz. Trazar la recta $\overleftrightarrow{PF}$, con $F \in \overrightarrow{BA}$ y tal que $m(\measuredangle BPF) = m(\measuredangle FBP)$. Probar que $\overleftrightarrow{PF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

47. Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos tienen igual medida si son de la misma naturaleza y son suplementarios si son de distinta naturaleza.

48. Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares tienen igual medida si son de la misma naturaleza y son suplementarios si son de distinta naturaleza.

49. Sean $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DA} \perp \overline{DC}$. Calcular la medida de $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD$.

50. Por un punto D del lado $\overline{BC}$ del ángulo ABC se traza una perpendicular $\overline{DE} \perp \overline{BC}$; E es el punto de intersección con el lado $\overline{BA}$. En E se traza $\overline{EF} \perp \overline{BA}$; $F \in \overline{BC}$. ¿Qué se puede decir del $\measuredangle ABC$, del $\measuredangle DEF$ y del $\measuredangle DFE$? ¿Por qué?

Soluciones

1. a) 40° 52′ 5″
b) 87° 43′ 48″
c) 48° 5′ 2″
d) 38° 25′ 58″
e) 130° 42′ 20″
f) 34° 47′ 45″
g) 44° 36′ 16″
h) 179° 44′ 48″
i) 63° 59′ 54″
j) 57° 45′

2. a) 128° 16′ 46″
b) 33° 22′ 59″
c) 41° 32″
d) 7° 37′ 33″
e) 207° 55′ 27″

3. a) 4° 47′ 54″ ; 94° 47′ 54″
b) 57° 34′ 46″ ; 147° 34′ 46″
c) No tiene ; 55°
d) 41° 46′ ; 131° 46′
e) 77° 59′ 54″ ; 167° 59′ 54″
f) 16° 57′ 7″ ; 106° 57′ 7″
g) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$
h) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$
i) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$
j) $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{17\pi}{18}$
k) No tiene ; $\frac{\pi}{3}$
l) No tiene ; $\frac{\pi}{6}$
m) No tiene ; No tiene

n) No tiene ; $\frac{\pi}{10}$
o) No tiene ; No tiene
p) No tiene ; 1,14 rad
q) 1,27 rad ; 2,84 rad
r) 0,82 rad ; 2,39 rad

4. a) 32º 50′ 24″ ; 49º 15′ 36″ ; 8º 12′ 36″
b) 6º 10′ 6″ ; 9º 15′ 9″ ; 1º 32′ 31,5″
c) 288º 24′ 10″ ; 432º 36′ 15″ ; 72º 6′ 2,5″
d) 2π ; 3π ; $\frac{\pi}{2}$
e) $\frac{4\pi}{3}$; 2π ; $\frac{\pi}{3}$
f) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$

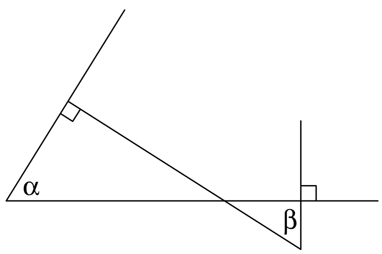
5. a) 25,2º
b) $132{,}88\overline{3}^{\circ}$
c) 15,5º
d) 17,5375º
e) $24{,}20\overline{3}^{\circ}$
f) $5{,}0169\overline{4}^{\circ}$

6. a) 25º 30′
b) 143º 21′ 36″
c) 14º 7′ 26,4″
d) 15º 54′
e) 95º 18′
f) 27º 1′ 48″

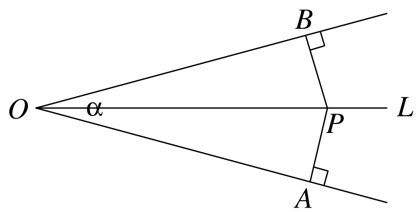
7. a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{3\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{3}$
f) 0,7
g) 0,263
h) 0,78
i) 2,1
j) $\frac{3\pi}{4}$

8. a) 60º
b) 90º
c) 30º
d) 45º
e) 22,5º
f) 135º
g) 300º
h) 360º
i) 420º
j) 150º
k) 183,35º
l) 143,24º

9. a) Sea n un número. Hipótesis: n termina en 0. Tesis: n es divisible por 10.
b) Sea n un número. Hipótesis: n es divisible por 10. Tesis: n termina en 0.
c) Hipótesis: α y β son ángulos de la misma naturaleza que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.
Tesis: $\alpha = \beta$

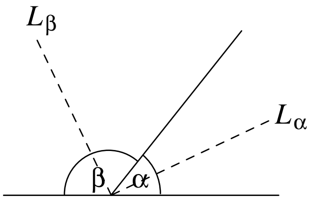


d) Hipótesis: $P \in L$ bisectriz de α.
Tesis: $PA = PB$ (A y B son el pie de la perpendicular trazada desde P a ambos lados del ángulo).



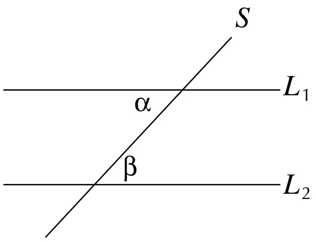
e) Hipótesis: $\alpha + \beta$ son dos ángulos adyacentes y suplementarios; L_α y L_β son sus respectivas bisectrices.

Tesis: $L_\alpha \perp L_\beta$.

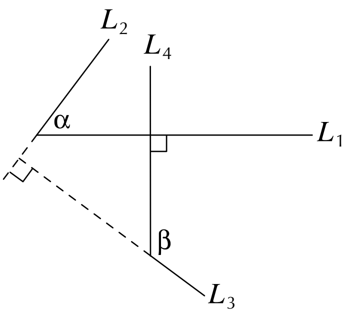


f) Hipótesis: $L_1 \parallel L_2$; S secante; α y β ángulos alternos internos.
Tesis: $\alpha = \beta$.

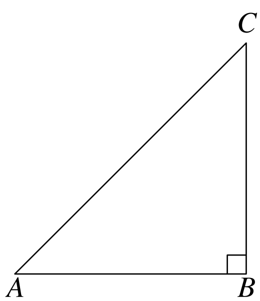
g) Hipótesis: α y β ángulos alternos internos; $\alpha = \beta$.
Tesis: $L_1 \parallel L_2$.



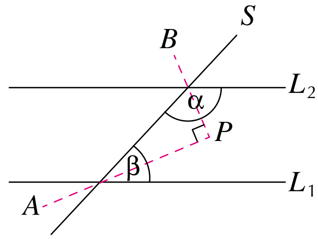
h) Hipótesis: α ángulo agudo de lados L_1 y L_2; β ángulo obtuso de lados L_3 y L_4; $L_2 \perp L_3$; $L_4 \perp L_1$.
Tesis: $\alpha + \beta = 180^\circ$.



i) Hipótesis: ABC triángulo rectángulo en B.
Tesis: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

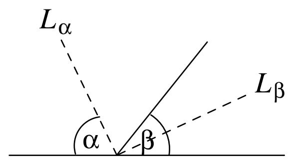


j) Hipótesis: $L_1 \parallel L_2$; S transversal; α y β ángulos internos del mismo lado de la transversal; $\overrightarrow{AP}$ bisectriz de α, $\overrightarrow{BP}$ bisectriz de β.
Tesis: $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$.



k) Hipótesis: α y β ángulos adyacentes suplementarios; L_α bisectriz de α; L_β bisectriz de β.

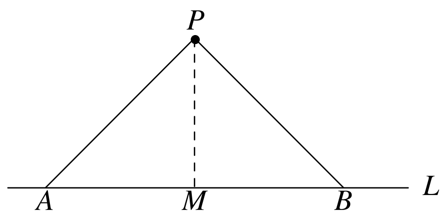
Tesis: $L_\alpha \perp L_\beta$.



l) Hipótesis: L recta; $P \notin L$;

$\overline{PM} \perp L$ en M; $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ oblicuas con A y B en L; $AM = BM$.

Tesis: $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPM$.



16. $AM = 3$; $MN = 6$; $NP = PB = 4$.

17. $AP = BQ = 14$ cm; $QR = 7$ cm;
$PR = 15$ cm

18. $PQ = 25$ cm

19. $AB = \dfrac{3a+1}{4}$

20. $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 135^\circ$

21. $\alpha = 18^\circ$; $\beta = 54^\circ$; $\gamma = 108^\circ$

22. $\alpha = 62{,}31^\circ$; $\beta = 20{,}77^\circ$;
$\gamma + \delta = 186{,}92^\circ$

36. $x = 35°$; $\alpha = 75°$; $\beta = 105°$
37. $x = 76°$; $y = 76°$; $z = 84°$
38. $\alpha = \varepsilon = 115°$; $\beta = \gamma = 65°$
39. $x = 51°$
40. $\gamma = 110°$; $\delta = \beta = 70°$
49. 180°

50. $m(\measuredangle ABC) = m(\measuredangle DEF)$ tiene lados respectivamente perpendiculares si $\measuredangle ABC$ es agudo;
$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle DEF) = 180°$ si $\measuredangle ABC$ es obtuso.
$m(\measuredangle DFE) + m(\measuredangle ABC) = 90°$

EUCLIDES

(?, h. 330 a.C.-?, h. 275 a.C.)

Matemático griego. Poco se conoce a ciencia cierta de la vida de quien fuera el matemático más famoso de la Antigüedad. Se educó probablemente en Atenas, lo que explicaría con su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón, aunque no parece que estuviera familiarizado con las obras de Aristóteles. La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido así mismo una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje; Euclides, tras explicarle que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma, ordenó a su esclavo que diera unas monedas al muchacho, dado que éste tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios. Fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los "Elementos". Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores, que las superó de inmediato por su plan general y la magnitud de su propósito. De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se entiende todavía como geometría elemental; recogen las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres restantes se ocupan de geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas. Euclides estableció lo que, a partir de su contribución, había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados. En el caso de los Elementos, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes. La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto (postulado de las paralelas). Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrarlo como teorema; los esfuerzos por hallarle una demostración prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando se puso de manifiesto que era posible definir geometrías consistentes, llamadas «no euclidianas», en las que no se cumpliera la existencia de una única paralela trazada a una recta por un punto exterior a ella.

Prueba de selección múltiple

1. De las siguientes afirmaciones son falsas:

I. La suma de los ángulos adyacentes alrededor de un punto vale siempre cuatro ángulos rectos.

II. Los ángulos adyacentes formados a un lado de una recta suman siempre 180º.

III. Dos rectas de un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Ninguna

2. De estas afirmaciones son verdaderas:

I. La suma de los ángulos adyacentes suplementarios equivale a un ángulo extendido.

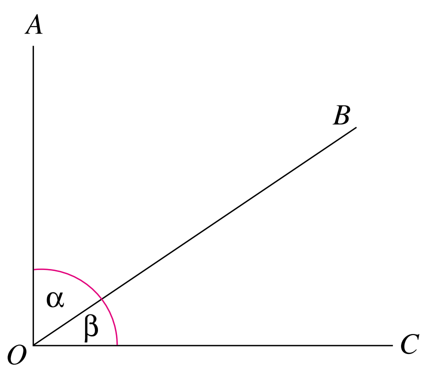
II. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

III. Dos ángulos son suplementarios si la suma de ellos es igual a 180º.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

3. Si $\overline{AO} \perp \overline{OC}$, se afirma que:

I. α y β son complementarios
II. $\alpha + \beta = 90º$
III. α es el suplemento de β



De estas afirmaciones son verdaderas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo II y III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

4. Se afirma que:

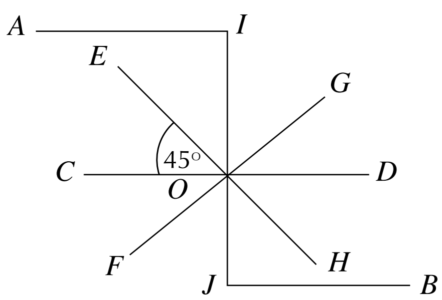
I. 0º < ángulo agudo < 90º
II. 0º < ángulo obtuso < 180º
III. 90º < ángulo extendido < 180º

De estas afirmaciones son falsas:

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. Sólo II y III
E. I, II y III

5. Si $\overline{AI} \parallel \overline{JB}$, $\overline{IJ} \perp \overline{JB}$, $m\measuredangle COE = 45º$, se afirma que en la figura:

I. $m\measuredangle OIA = 90º$
II. $m\measuredangle GOD = 45º$
III. $m\measuredangle DOH = m\measuredangle COE$

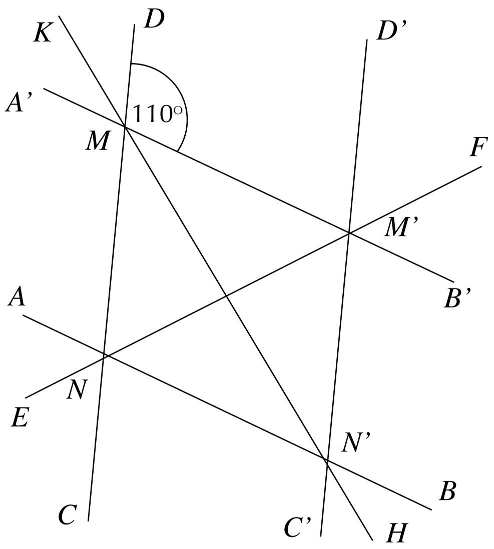


De estas afirmaciones es(son) verdadera(s).

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

6. Si $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$, $m\sphericalangle DMM' = 110^\circ$, se afirma que en la figura:

I. $m\sphericalangle M'MN = 70^\circ$
II. $m\sphericalangle KMD = 30^\circ$
III. $m\sphericalangle ENA = 110^\circ$



De estas afirmaciones es(son) falsa(s):

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo II y III
D. Sólo I y III
E. I, II y III

7. Se afirma que:

I. Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a dicha recta.
II. Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
III. Dos ángulos internos de distinto lado de la transversal entre paralelas son complementarios.

De estas afirmaciones son verdaderas.

A. Sólo I y II
B. Sólo II y III
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

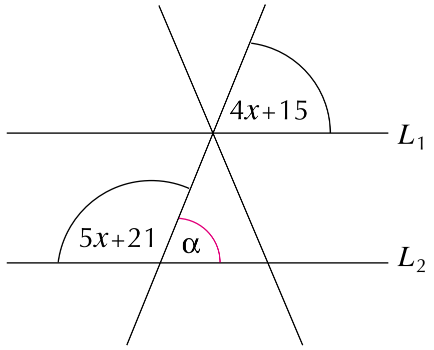
8. Se afirma que:

I. Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son complementarios.
II. Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.
III. Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales.

¿Cuál(es) de las afirmaciones es(son) verdadera(s)?

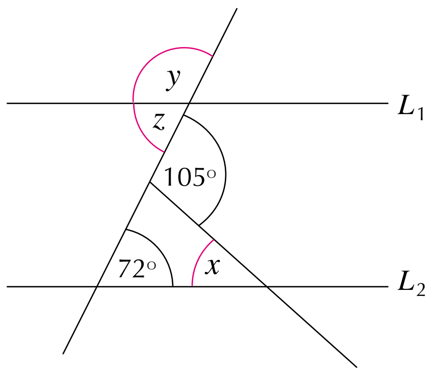
A. Sólo I y II
B. Sólo II y III
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

9. Si $L_1 \parallel L_2$, ¿cuánto vale α?



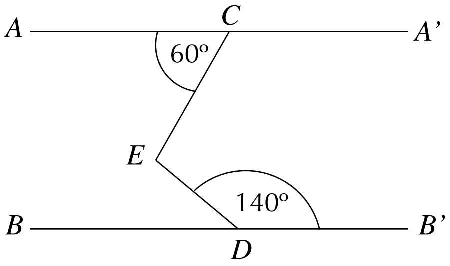
A. 35°
B. 45°
C. 16°
D. 59°
E. 79°

10. Sea $L_1 \parallel L_2$, ¿cuánto vale $2x - y + z$?



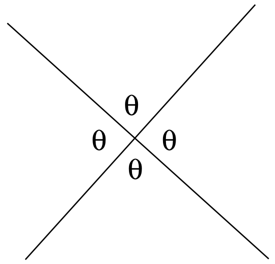
A. 180°
B. 30°
C. 40°
D. 50°
E. 230°

11. Se tienen dos rectas paralelas, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$. Sobre $\overleftrightarrow{AA'}$ se elige un punto C y sobre $\overleftrightarrow{BB'}$ se elige un punto D, los cuales se unen con un punto E situado entre las paralelas. Hallar la medida del $\measuredangle CED$ sabiendo que $\measuredangle ACE = 60º$ y $\measuredangle EDB' = 140º$.



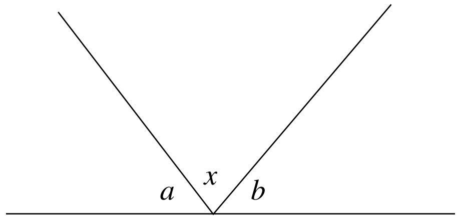
A. 100º
B. 120º
C. 140º
D. 160º
E. 90º

12. En la figura siguiente, ¿cuánto vale θ?



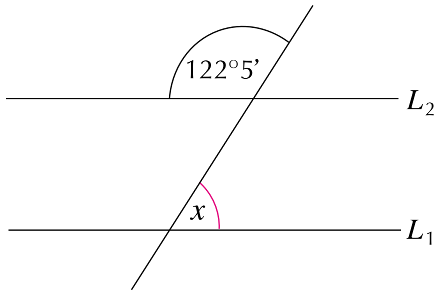
A. 45º
B. 60º
C. 90º
D. 180º
E. 360º

13. En la figura siguiente, ¿cuánto vale x?



A. $180º - (a + b)$
B. $180º - a + b$
C. $180º + a + b$
D. $180º + a - b$
E. $180º - (a - b)$

14. En la figura siguiente, si $L_1 \| L_2$, ¿cuánto vale x?



A. 56º 52′
B. 57º 53′
C. 57º 55′
D. 55º 57′
E. 55º 5′

15. Si $\alpha = 25º\ 10'$ y $\beta = 14º\ 20'\ 12''$, entonces el valor de $\dfrac{2\alpha - 3\beta}{4}$ es:

A. 1º 51′ 49″
B. 1º 49′ 12″
C. 1º 49′ 51″
D. 1º 49′
E. 1º 51′

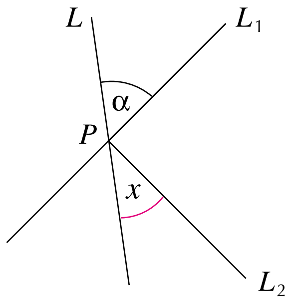
16. Hallar la medida del ángulo que, disminuido en su suplemento, es igual al triple de su complemento:

A. 22,5º
B. 45º
C. 60º
D. 90º
E. 180º

17. La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es 6 veces la medida del ángulo. Determinar el suplemento del complemento del ángulo.

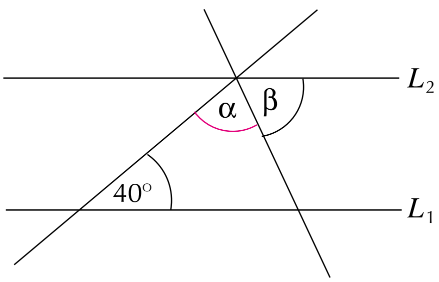
A. 15º
B. 75º
C. 90º
D. 105º
E. 165º

18. En la figura, $L_1 \perp L_2$ y P es su punto de intersección. La recta L pasa por P. Entonces x es igual:



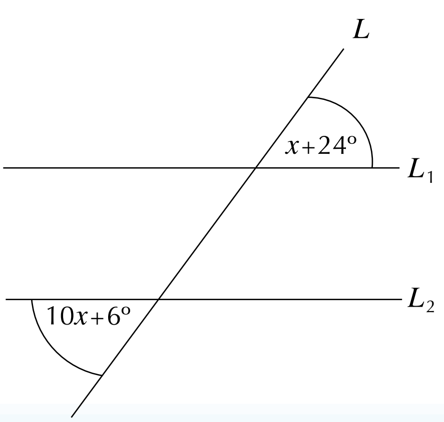
A. α
B. 45°
C. $270^\circ - \alpha$
D. $180^\circ - 2\alpha$
E. $90^\circ - \alpha$

19. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $\alpha : \beta = 2 : 5$. Determinar el valor de α:



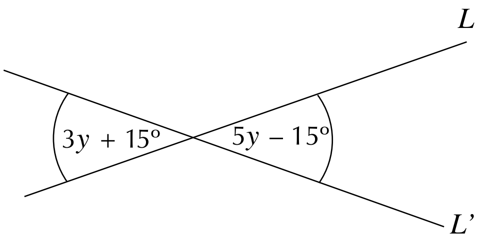
A. 20°
B. 40°
C. 50°
D. 120°
E. 100°

20. Si $L_1 \parallel L_2$ y L es secante, determinar el valor de x:



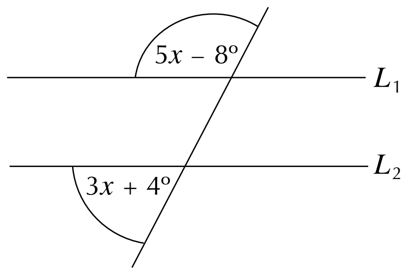
A. 2°
B. 3°
C. 4°
D. 27°
E. $\left(\frac{150}{11}\right)^\circ$

21. En la figura, determinar el valor de y:



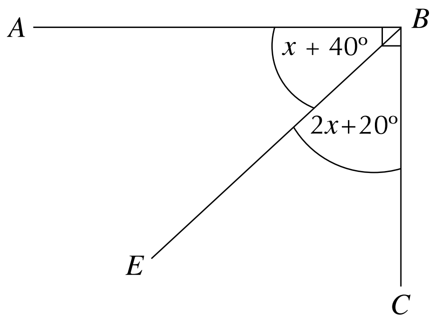
A. 10°
B. 15°
C. 25°
D. 30°
E. 35°

22. Si $L_1 \parallel L_2$, determinar el valor de x:



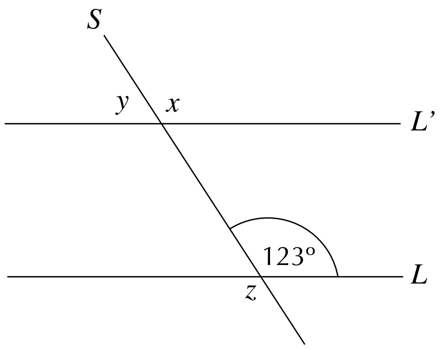
A. $23^\circ\, 60'$
B. $22^\circ\, 60'$
C. $22^\circ\, 59'$
D. $23^\circ\, 59'$
E. Ninguna de las anteriores

23. En la siguiente figura, determinar el valor de x:



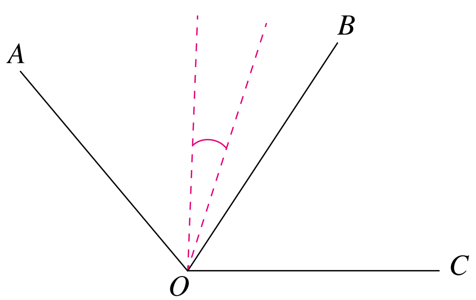
A. 50º
B. 40º
C. 30º
D. 20º
E. 10º

24. Si $L \| L'$, encontrar las medidas x, y y z de los ángulos que se indican en la figura:



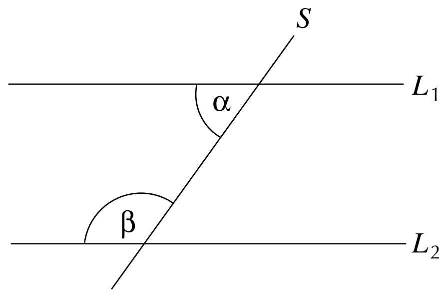
A. $x = 57º$; $y = 57º$; $z = 57º$
B. $x = 123º$; $y = 123º$; $z = 57º$
C. $x = 57º$; $y = 123º$; $z = 123º$
D. $x = 123º$; $y = 123º$; $z = 123º$
E. $x = 123º$; $y = 57º$; $z = 123º$

25. Sean los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, tales que el ángulo $\measuredangle AOC$ es igual a 130º. Hallar el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle AOB$, sabiendo que éstos se diferencian en 50º.



A. 20º
B. 25º
C. 30º
D. 35º
E. 40º

26. Si $L_1 \| L_2$ y el doble de α es 30º menor que β, determinar en cuántos grados se diferencian α y β.

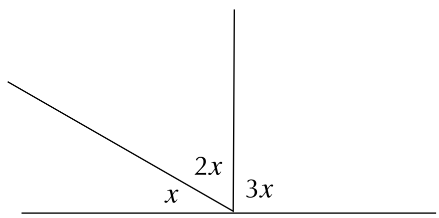


A. 50º
B. 60º
C. 80º
D. 130º
E. 180º

27. Encontrar la medida de dos ángulos complementarios cuya razón es 2 : 3.

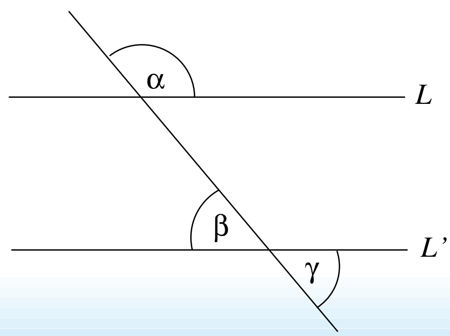
A. 43º y 47º
B. 36º y 54º
C. 36º y 45º
D. 25º y 65º
E. 15º y 75º

28. En la siguiente figura, determinar el valor de x.



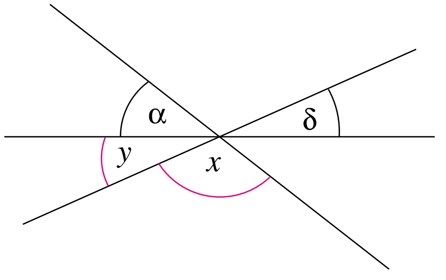
A. 30º
B. 45º
C. 60º
D. 65º
E. 90º

29. En la siguiente figura, $L \| L'$ y $\alpha = 130º$. Encontrar el valor de $\beta + \gamma$:



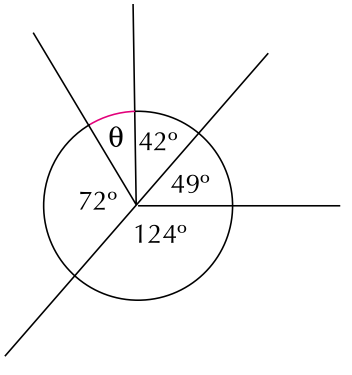
A. 50º
B. 75º
C. 100º
D. 130º
E. 140º

30. Si $\alpha = 38º$ y $\delta = 24º$, encontrar el valor de x e y.



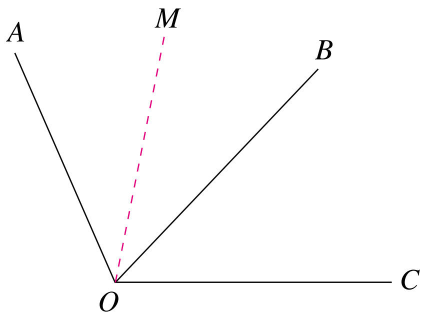
A. $x = 117º$, $y = 25º$
B. $x = 118º$, $y = 24º$
C. $x = 116º$, $y = 23º$
D. $x = 23º$, $y = 116º$
E. $x = 24º$, $y = 118º$

31. En la siguiente figura, encontrar el valor de θ.



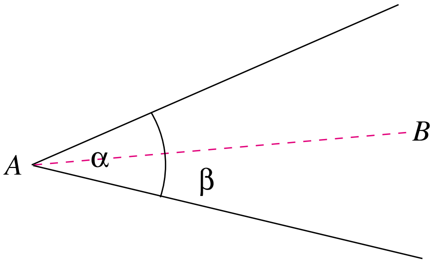
A. 53º
B. 63º
C. 73º
D. 83º
E. 93º

32. Dados los ángulos adyacentes AOB y BOC, donde $m(\measuredangle AOC) = \alpha$ y $m(BOC) = \beta$, determinar $m(\measuredangle COM)$, siendo $\overrightarrow{OM}$ bisectriz de $\measuredangle AOB$.



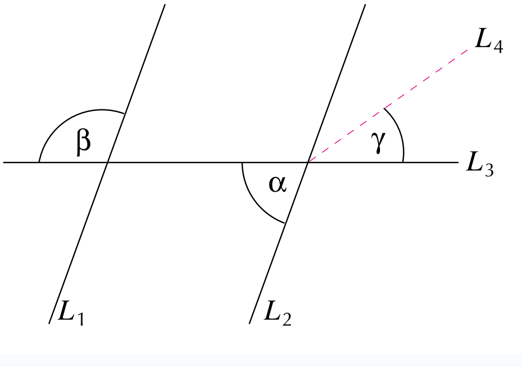
A. $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
B. $\dfrac{-(\alpha - \beta)}{2}$
C. $\alpha + \dfrac{\beta}{2}$
D. $\dfrac{-(\alpha + \beta)}{2}$
E. $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

33. Si $\alpha = 37º\ 90'\ 180''$ y $\overrightarrow{AB}$ es bisectriz de α, ¿cuánto mide el complemento de $(\alpha - 2\beta)$?



A. 270º
B. 0º
C. 180º
D. 90º
E. Ninguna de la anteriores

34. Si $L_1 \parallel L_2$, L_4 es bisectriz de α y $\gamma = 35º$, ¿cuánto mide el suplemento de β?



A. 70º
B. 180º
C. 90º
D. 35º
E. 110º

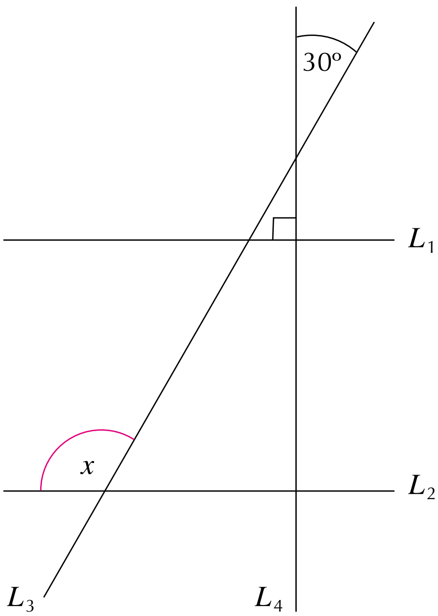
35. Si a las $\frac{3}{4}$ partes de la medida de un ángulo se les resta el 20%, de esa medida, se obtiene 110º. Determinar el complemento del 10% del ángulo.

A. 10º
B. 20º
C. 50º
D. 70º
E. 80º

36. Si el 25% de α es 5º30′ y el 40% de β es 52º, calcular $\alpha + \beta$.

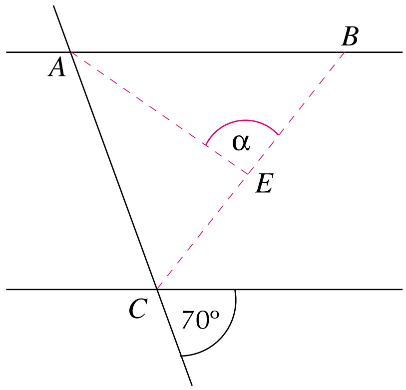
A. 22º
B. 40º
C. 92º
D. 130º
E. 152º

37. Si $L_1 \| L_2$, L_3 y L_4 secantes, con $L_4 \perp L_1$, entonces x es igual a:



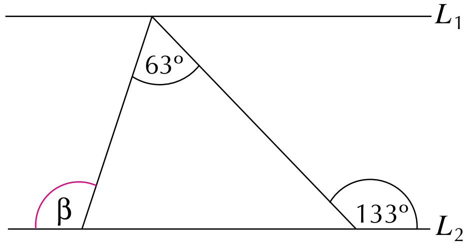
A. 118º 120′
B. 116º 120′
C. 114º 240′
D. 112º 240′
E. 110º 240′

38. Si $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AC}$ secante, $\overleftrightarrow{AE}$ bisectriz de $\measuredangle CAB$, $\overleftrightarrow{CE}$ bisectriz de $\measuredangle ACD$, determinar la medida de α.



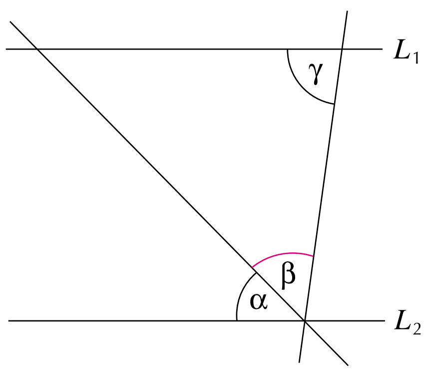
A. 90º
B. 60º
C. 45º
D. 30º
E. 15º

39. Si en la figura $L_1 \| L_2$, entonces el valor de β es:



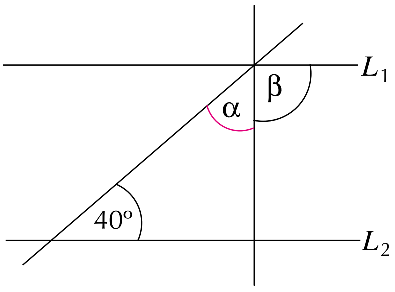
A. 47º
B. 70º
C. 110º
D. 133º
E. 147º

40. Si $L_1 \| L_2$ y $\alpha : \beta = 3 : 4$, $\gamma = 82º$, entonces el valor de β es:



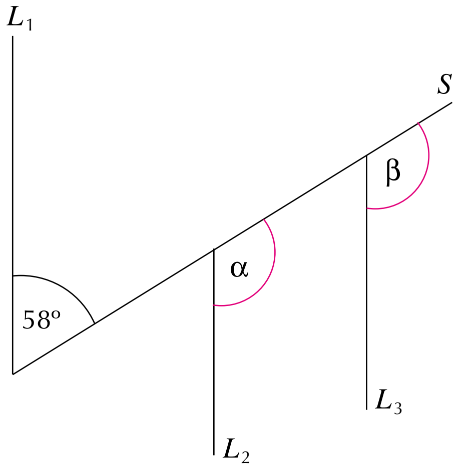
A. 66º
B. 56º
C. 36º
D. 26º
E. 42º

41. Si $L_1 \parallel L_2$ y $\alpha : \beta = 2 : 5$, determinar el valor de α.



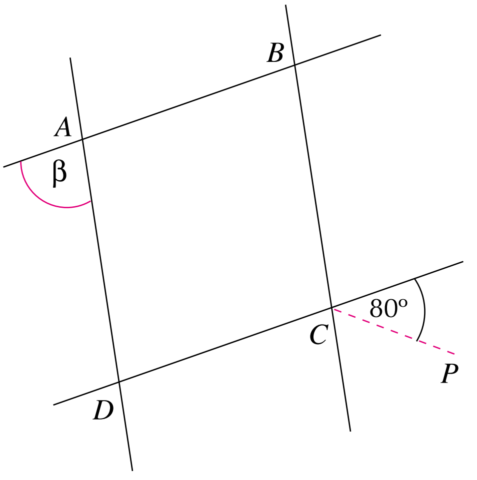
A. 30º
B. 70º
C. 50º
D. 90º
E. 40º

42. Si $L_1 \parallel L_2$, $L_2 \parallel L_3$ y S es secante a las rectas L_1, L_2 y L_3, determinar los valores de α y β.



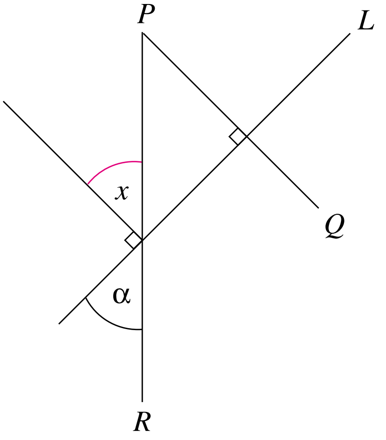
A. $\alpha = 122º$, $\beta = 132º$
B. $\alpha = 132º$, $\beta = 132º$
C. $\alpha = 132º$, $\beta = 122º$
D. $\alpha = 122º$, $\beta = 122º$
E. $\alpha = 58º$, $\beta = 58º$

43. Sabiendo que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CP}$ es bisectriz, hallar la medida de β.



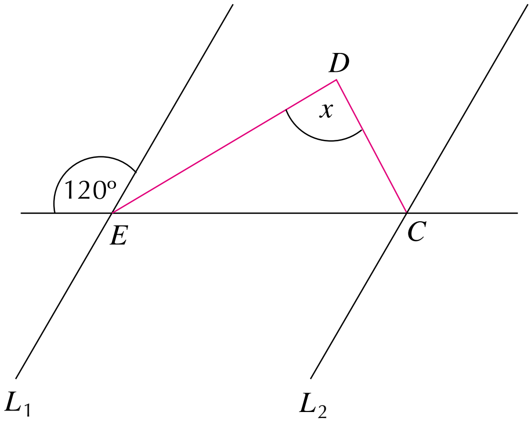
A. 60º
B. 80º
C. 20º
D. 35º
E. 40º

44. Si $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$, determinar el valor de x.



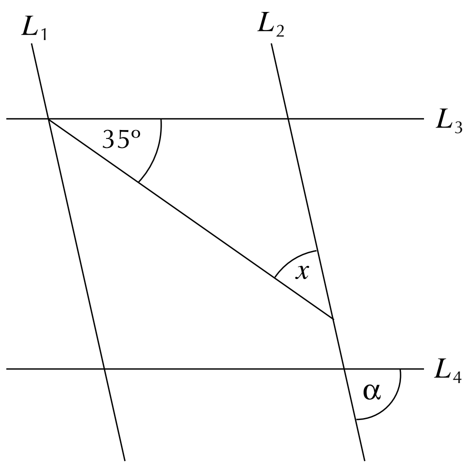
A. $90º - \alpha$
B. $90º + \alpha$
C. $180º - \alpha$
D. $180º + \alpha$
E. 45º

45. Sean $L_1 \parallel L_2$; $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{DE}$ bisectrices. Determinar el valor de x.



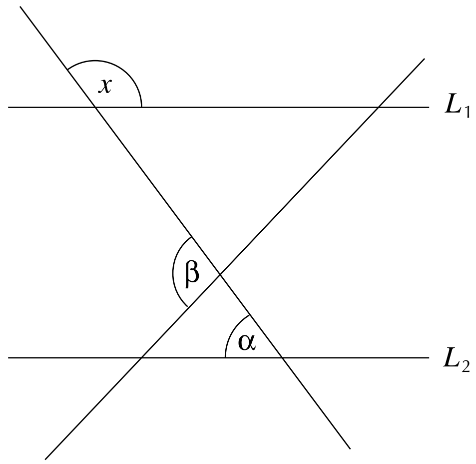
A. 100º
B. 92º
C. 88º 100′
D. 120º 90′
E. 88º 120′

46. Si $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$, ¿cuál es el valor de x en función de α?



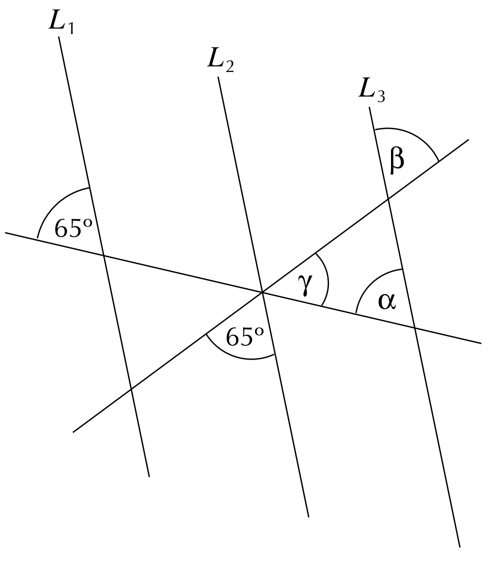
A. α + 35º
B. α + 180º
C. α – 35º
D. 180º – α
E. α – 180º

47. Si en la figura $L_1 \parallel L_2$, ¿cuál es el valor de x?



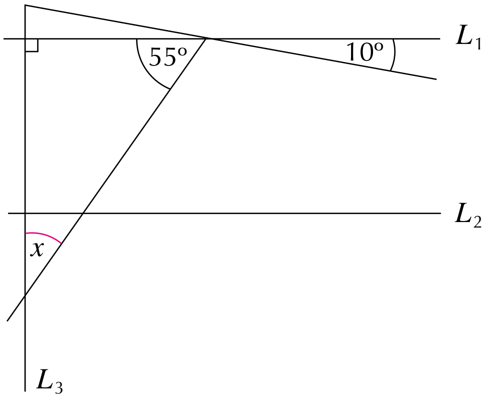
A. α + β
B. 180º – α + β
C. 180º – α
D. β – α
E. 180º – β

48. Sean $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determinar el valor de α + β – γ.



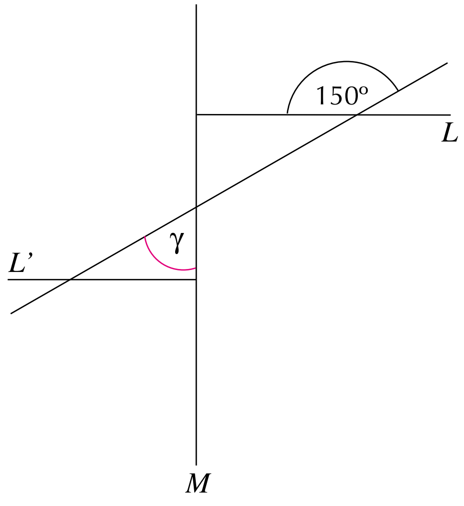
A. 80º
B. 90º
C. 150º
D. 65º
E. 85º

49. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \perp L_1$. Determinar el valor de x.



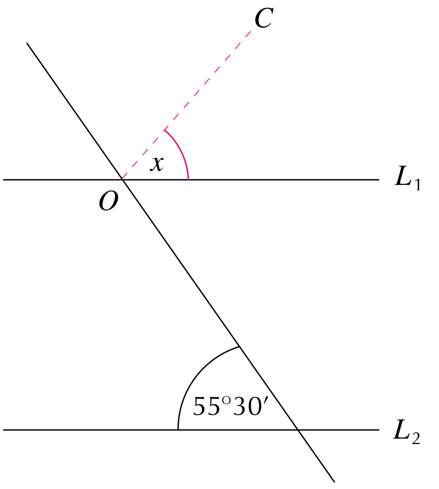
A. 50º
B. 45º
C. 40º
D. 10º
E. 35º

50. Sean $L \perp M$ y $L' \perp M$. Determinar el valor de γ.



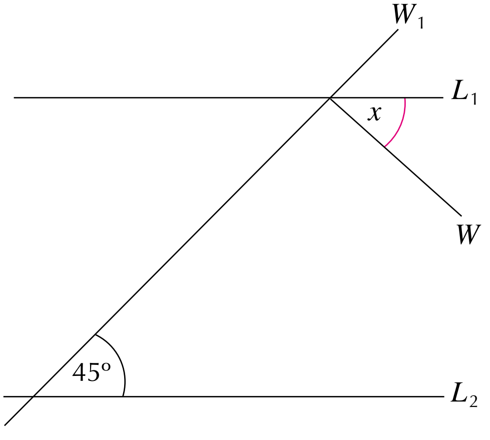
A. 90º
B. 60º
C. 30º
D. 40º
E. 45º

51. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $\overrightarrow{OC}$ bisectriz. Determinar el valor de x.



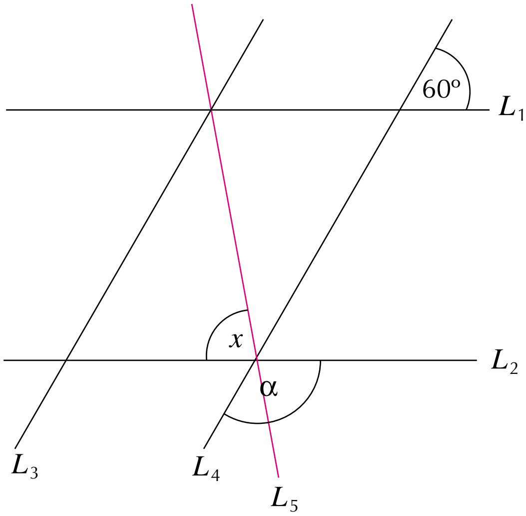
A. 62º 14′ 60″
B. 50º 30′ 20″
C. 62º 30′
D. 62º 17′
E. 62º 14′

52. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $W_1 \perp W$. Determinar el valor de x.



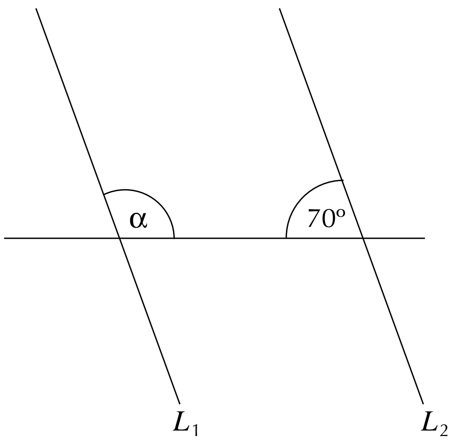
A. 30º
B. 45º
C. 60º
D. 90º
E. 135º

53. En la figura, $L_1 \| L_2$, $L_3 \| L_4$ y L_5 bisectriz del ángulo α. Determinar el valor de x.



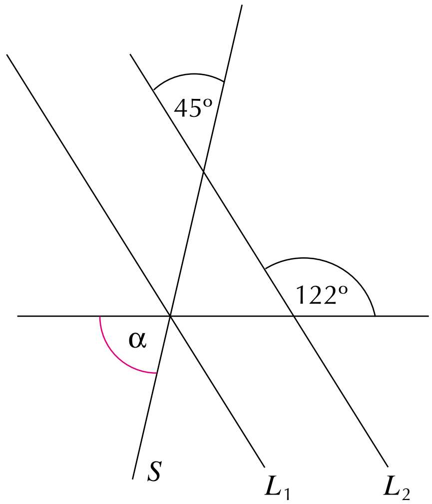
A. 30º
B. 45º
C. 60º
D. 100º
E. 120º

54. Si $L_1 \| L_2$, determinar la mitad de α.



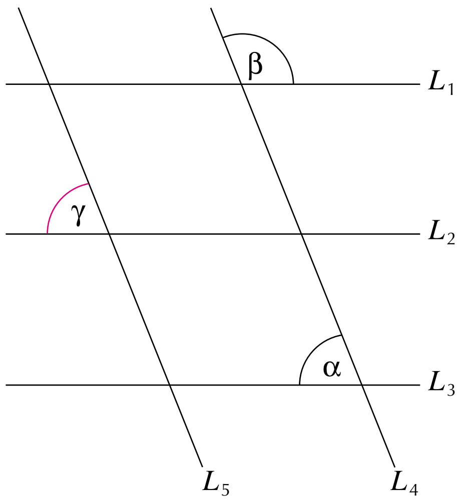
A. 35º
B. 50º
C. 55º
D. 70º
E. 110º

55. Si $L_1 \| L_2$, ¿cuál es el valor de α?



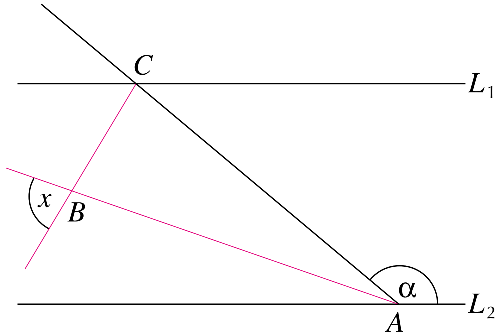
A. 30º
B. 68º
C. 77º
D. 122º
E. 158º

56. Si $L_1 \| L_2 \| L_3$; $L_4 \| L_5$ y $\alpha : \beta = 2 : 3$, determinar el valor de γ.



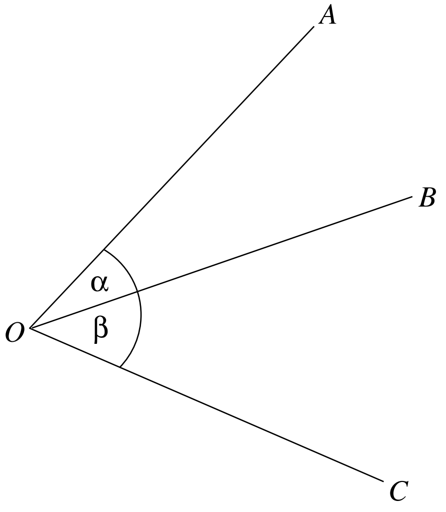
A. 36º
B. 60º
C. 70º
D. 72º
E. 108º

57. En la figura, $L_1 \| L_2$, $\alpha = 140^\circ$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ bisectrices. Determinar el valor de x.



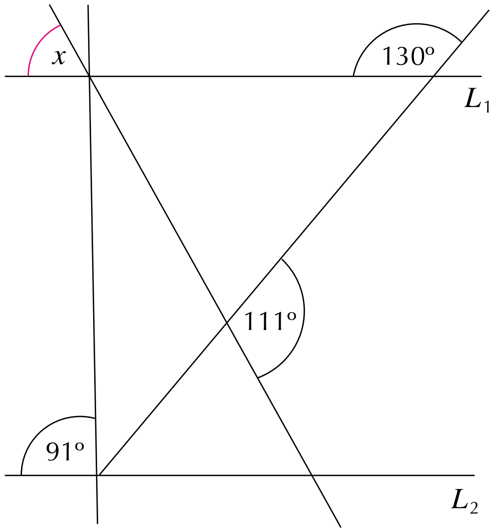
A. 30º
B. 40º
C. 60º
D. 75º
E. 90º

58. Si $m(\measuredangle AOC) = 70^\circ$ y $\alpha : \beta = 2 : 3$, determinar los valores de α y β.



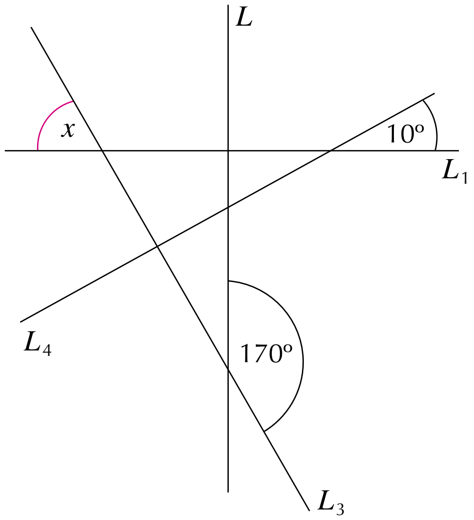
A. $\alpha = 38^\circ$ y $\beta = 32^\circ$
B. $\alpha = 28^\circ$ y $\beta = 42^\circ$
C. $\alpha = 24^\circ$ y $\beta = 46^\circ$
D. $\alpha = 10^\circ$ y $\beta = 60^\circ$
E. $\alpha = 40^\circ$ y $\beta = 30^\circ$

59. Determinar el valor de x si $L_1 \| L_2$.



A. 62º
B. 61º
C. 63º
D. 91º
E. 111º

60. Determinar el valor de x sabiendo que $L \perp L_1$ y $L_3 \perp L_4$.



A. 80
B. 75º
C. 60º
D. 20º
E. 10º

Soluciones

1. D	**11.** A	**21.** B	**31.** C	**41.** E	**51.** A
2. E	**12.** C	**22.** B	**32.** E	**42.** D	**52.** B
3. D	**13.** A	**23.** E	**33.** D	**43.** C	**53.** C
4. D	**14.** C	**24.** E	**34.** A	**44.** A	**54.** C
5. C	**15.** C	**25.** B	**35.** D	**45.** E	**55.** C
6. C	**16.** D	**26.** C	**36.** E	**46.** C	**56.** D
7. A	**17.** D	**27.** B	**37.** A	**47.** C	**57.** E
8. B	**18.** E	**28.** A	**38.** A	**48.** A	**58.** B
9. E	**19.** B	**29.** C	**39.** C	**49.** E	**59.** B
10. B	**20.** A	**30.** B	**40.** B	**50.** B	**60.** A